Flexible Polyeder

Faszinierend an der Kunst des Papierfaltens ist die Erschaffung eines beweglichen Gebildes, das aus unveränderlichen Kanten und Dreiecksflächen besteht. Ein Origami-Kranich bewegt seine Schwingen aufgrund der Elastizität des Papiers. Die Flexibilität bestimmter allseitig geschlossener Hohlkörper ist aber auch auf anderem Wege erreichbar. Bereits vor 20 Jahren zeigten Mathematiker, daß es möglich ist, bewegliche Strukturen zu konstruieren, die aus geschlossenen dreidimensionalen Figuren bestehen und ausschließlich aus starren Dreiecken zusammengesetzt sind. Diese Gebilde können durch Zusammendrücken oder Auseinanderziehen in eine andere Form überführt werden, ohne daß die Flächen verzerrt werden. Das war eine Überraschung für Mathematiker und Ingenieure, denn bisher zweifelte niemand daran, daß eine Struktur, die nur aus Dreiecken besteht, unverändert stabil ist. Ganz offensichtlich gilt das nur in speziellen Fällen. Eine Bewegung ist nämlich dann möglich, wenn das Volumen konstant bleibt und die Kanten charakteristische Eigenschaften besitzen.

Schon um die Jahrhundertwende bewies der französische Ingenieur Raoul Bricard, daß Polyeder, die Einkerbungen aufweisen, beweglich sind, wenn die Flächen einander durchdringen können. Er bezog sich dabei auf einen Achtflächner. In den 70er Jahren griffen Robert Conelly und Mitarbeiter (Cornell University) diese These auf, und es gelang ihnen durch sorgfältige Weiterentwicklung von Bricard's Überlegungen, eine bewegliche Oberfläche zu erhalten. Dabei ließen sie zu, daß sich bestimmte Kanten umeinander bewegen. Später entdeckte Klaus Steffen (Universität Düsseldorf, BRD) ein flexibles Polyeder mit nur 9 Scheitelpunkten und 14 Dreiecksflächen, von dem man annimmt, daß es den einfachsten Vertreter der beweglichen Polyeder darstellt.

Sobald das erste Modell fertiggestellt war, begannen die Mathematiker damit zu experimentieren. So stellte Hermann Gluck (University of Pennsylvania) fest, daß das Eindrücken der Struktur an einer Stelle stets das Hervorspringen einer Ecke an einer anderen Stelle zur Folge hat. Dennis Sullivan (City University of New York) blies Rauch in das Modell hinein, und bemerkte, daß dieser selbst beim Verformen des Polyeders nicht wieder austritt – ein Hinweis auf die Konstanz des Volumens. Es besteht also keinerlei Ähnlichkeit mit einem Blasebalg.

Der Schlüssel zum Beweis, daß flexible Vielflächner möglich sind, war schließlich die Verallgemeinerung einer Formel, die schon im Altertum von dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria aufgestellt wurde. Er fand eine Beziehung zwischen der Fläche x und den Seitenlängen von Dreiecken (a, b, c). Sie müssen dem Polynom $16x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$ folgen. Conelly und unabhängig von ihm Idzhad Sabitov (Moscow State University) kamen zu dem Schluß, daß das Volumen eines jeden Polyeders mit einem ähnlichen Polynom berechenbar sein sollte. Sabitov hatte die Idee, eine komplizierte Figur in einfache Tetraeder zu unterteilen und die so resultierenden „Teilpolynome" zu einem Ganzen zu verknüpfen. Jedoch selbst für eine so einfache Struktur wie ein Oktaeder ergibt sich auf diesem Wege ein Polynom 16. Ordnung.

Im letzten Jahr gelang Sabitov, Conelly und seiner Studentin Anke Walz eine deutliche Vereinfachung der mathematischen Beschreibung, die aber immer noch viele ungelöste Fragestellungen enthält, wie z.B der Einfluß der Kantenlänge auf die Form des eingeschlossenen Raumes. Sabitov ist optimistisch und glaubt, daß die Mathematiker in absehbarer Zeit verstehen werden, wie sich die Kantenlängen auf das Volumen und die Beweglichkeit von Polyedern auswirken. Er meint, daß die Mathematiker bald ein neues Kapitel zur Geometrie mit dem Titel „ Lösungen für Tetraeder“ schreiben werden und damit das bestehende „Lösungen für Dreiecke“ fortsetzen. [D. Mackenzie, Science, **279**, 1637 (1998).]

Dr. Monika Schwarzenberg, Krefeld