

# Bornes uniformes pour le nombre de points rationnels de certaines courbes

Sinnou David, Michael Nakamaye and Patrice Philippon

*Au Professeur C. S. Seshadri à l'occasion de son 75ème anniversaire*

**Abstract.** We present new lower bounds, proved in [Da-Phi3], for the canonical height of algebraic subvarieties of polarized abelian varieties which are isogeneous to a power of an elliptic curve. Combining these with a geometrical construction we exhibit families of curves defined over a number field, of arbitrary (sufficiently large) genus and satisfying a strong uniformity property for the cardinality of their points which are rational over any given number field.

**Mathematics Subject Classification (2000):** 11G10 (primary); 11J81, 14G40 (secondary).

## 1. Introduction et résultats

Soit  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$ , munie d'un fibré en droites ample  $\mathcal{L}$ , définis sur le corps des nombres algébriques  $\overline{\mathbf{Q}}$  (en fait sur une extension finie de  $\mathbf{Q}$  que nous noterons  $K_0$ ). On suppose de plus que le fibré  $\mathcal{L}$  est symétrique, c'est-à-dire satisfait  $[-1]^*\mathcal{L} = \mathcal{L}$ . Quitte à remplacer  $\mathcal{L}$  par une puissance tensorielle  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  avec  $n \geq 3$ , nous supposerons au besoin que  $\mathcal{L}$  est très ample, induisant *via* le choix d'une base de  $H^0(A; \mathcal{L})$  un plongement  $\varphi_{\mathcal{L}} : A \hookrightarrow \mathbf{P}_n$  de  $A$  dans un espace projectif  $\mathbf{P}_n$ , défini sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ .

Le théorème de Mordell-Weil affirme que pour toute extension finie  $K$  de  $K_0$  le groupe  $A(K)$  des points  $K$ -rationnels est isomorphe au produit d'un groupe libre, de rang disons  $r \in \mathbf{N}$ , et de son sous-groupe de points de torsion (qui est fini). On appelle cet entier  $r$  le *rang de Mordell-Weil* de  $A(K)$ .

Par exemple, on attache à toute courbe algébrique lisse  $C$  de genre  $g \geq 2$  sa jacobienne  $\mathcal{J}$  qui est une variété abélienne de dimension  $g$  naturellement munie d'un fibré en droites symétrique et ample  $\mathcal{L}_0$  et, si  $C(K) \neq \emptyset$ , d'un plongement de  $C$  dans  $\mathcal{J}(C)$ . On rappelle que  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}(\Theta)$ , où  $\Theta$  désigne le diviseur thêta sur  $\mathcal{J}(C)$ , induit une polarisation principale sur  $\mathcal{J}(C)$  (et donc  $\deg_{\mathcal{L}_0}(\mathcal{J}(C)) = g!$ ) et que  $\Theta.C = g$ .

On sait depuis Faltings que le nombre de points  $K$ -rationnels de  $C$  est fini (*ex* conjecture de Mordell). De même, le nombre de points de torsion<sup>1</sup> de la jacobienne  $\mathcal{J}(C)$  de  $C$  appartenant à  $C$  est également fini par un théorème de Raynaud (*ex* conjecture de Manin–Mumford). Nous nous intéressons ici à des questions d'uniformité liées à ces énoncés. Plus précisément, sachant que les ensembles précités sont finis, de quels invariants liés à  $C/K$  peuvent dépendre leurs cardinaux?

Dans ce contexte, une conjecture (généralement attribuée à B. Mazur) fait figure de référence :

**Conjecture 1.1.** Soient  $g$  un entier  $\geq 2$  et  $K$  un corps de nombres. Il existe alors un nombre réel  $c(g, K) > 0$  tel que pour toute courbe  $C$  de genre  $g$  définie sur  $K$ , on ait :

$$\text{card}(C(K)) \leq c(g, K)^{1+\text{rang}(\mathcal{J}(C)(K))}.$$

De façon très optimiste, on peut encore se demander si, dans la situation de la Conjecture 1.1, on peut espérer une borne de la forme

$$\text{card}(C(K)) \leq c(g, K) \text{ (voire } \leq c(g, [K : \mathbf{Q}]) \text{).} \quad (1.1)$$

Un résultat de Caporaso, Harris et Mazur [Ca–Har–Maz] montre qu'un tel énoncé résulte d'une conjecture de Bombieri et Lang.

En utilisant un travail récent<sup>2</sup> (*confer* [Da–Phi3]), nous exhibons au § 2 des familles algébriques de courbes de genre arbitraire (assez grand) satisfaisant (1.1). Les courbes exhibées ne sont pas toujours lisses, ce qui ne présente aucune difficulté pour appliquer les résultats de *loc. cit.*, on définit le genre d'une courbe singulière comme celui d'une désingularisation.

Précisément, nous établissons aux §§ 3.1 et 3.2 le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** Soit  $g \geq 4$  un entier, alors il existe une famille non constante de base  $B_g := \mathbf{P}_{g-2} \setminus D_g$  (où  $D_g$  est un diviseur de  $\mathbf{P}_{g-2}$  de degré  $\leq 864(g-1)^3$ ), définie sur  $\mathbf{Q}$ , de courbes de genre  $g$  satisfaisant pour tout corps de nombres  $K$  et tout  $y \in B_g(K)$  :

$$\text{card}(C_y(K)) \leq g^{3^{25}([K:\mathbf{Q}]+h_2(K))},$$

---

<sup>1</sup>  $\overline{K}$ -rationnels.

<sup>2</sup> Comme remarqué plus loin (*confer* Remarque 3.5) l'utilisation de ces dernières avancées n'est pas indispensable pour établir le Théorème 1.1. Les résultats de [Da–Phi1]–II suffisent, mais donnent néanmoins des constantes numériques moins bonnes. En revanche, [Da–Phi3] est pleinement utilisé dans le Théorème 3.6 du § 3.2.

où  $h_2(K)$  désigne le rang sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  de la 2-partie du groupe des classes d'idéaux de l'anneau des entiers de  $K$ .

De plus, pour tout  $y \in B_g$  il existe moins de  $(8^{g+1}g)^{8g^3+2} \leq 2^{35g^4}$  points  $y' \in B_g$  tels que  $C_y$  et  $C_{y'}$  soient birationnellement équivalentes (sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ ).

**Remarque 1.2.** D'après un théorème de G. Rémond [Ré2], pour tout  $y \in B_g(K)$  sauf un nombre fini (dépendant de  $g$  et  $K$ ), on a  $\text{card}(C_y(K)) \leq (4g)^{11}$ .

Rappelons que la variété des modules des courbes de genre  $g \geq 2$  a pour dimension  $3g - 3$ , tandis que nos familles sont de dimension  $g - 2$ .

Le reste de cette introduction est consacré à la présentation d'une stratégie pour établir la Conjecture 1.1 et de quelques avancées dans cette direction, détaillées dans [Da-Phi3]. Le lecteur intéressé par la preuve du Théorème 1.1 peut donc passer directement au § 3.1.

Plus généralement, considérons une sous-variété algébrique  $V$  quelconque d'une variété abélienne  $A$  munie d'un fibré très ample et symétrique  $\mathcal{L}$ , définis sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , et un sous-groupe  $\Gamma$  de  $A(\overline{\mathbf{Q}})$  de rang fini  $r := \dim_{\mathbf{Q}}(\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$  (on retrouve le cadre précédent en posant  $V = C$ ,  $A = \mathcal{J}(C)$  et  $\Gamma = \mathcal{J}(C)(K)$ ). On sait alors, par un théorème de Vojta-Faltings (*ex* conjecture de Mordell-Lang), que les points de  $V \cap \Gamma$  se trouvent dans un nombre fini de translatés de sous-variétés abéliennes de  $A$  contenus dans  $V$ .

La généralisation de la question précédemment énoncée (Conjecture 1.1) se résume comme suit : de quels invariants dépend ce nombre de translatés ? Dans ce cadre, est suggérée dans [Da-Phi3] la conjecture suivante (on note  $\deg_{\mathcal{L}} := \deg \circ \varphi_{\mathcal{L}}$ ) :

**Conjecture 1.2 ([Da-Phi3], Conj. 1.2).** Soient  $g, \delta$  et  $\Delta$  des entiers  $\geq 1$  et  $r$  un entier  $\geq 0$ . Il existe alors un nombre réel  $c_1(g, \delta, \Delta) > 0$  tel que la propriété suivante soit vraie. Soit  $(A, \mathcal{L})$  une variété abélienne munie d'un fibré très ample et symétrique, définis sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , telle que  $\dim(A) \leq g$  et  $\deg_{\mathcal{L}}(A) \leq \delta$ ,  $V$  une sous variété de  $A$ , également  $\overline{\mathbf{Q}}$ -rationnelle, telle que  $\deg_{\mathcal{L}}(V) \leq \Delta$  et soit enfin  $\Gamma$  un sous-groupe de  $A(\overline{\mathbf{Q}})$  de rang  $\leq r$ . Alors,

$$V \cap \Gamma = \bigcup_{j=1}^S (\gamma_j + B_j) \cap \Gamma ,$$

où  $\gamma_j \in \Gamma$  et  $B_j$  est une sous-variété abélienne de  $A$  tels que  $\gamma_j + B_j \subset V$ , avec

$$S \leq c_1(g, \delta, \Delta)^{1+r} .$$

Notons tout de suite que la Conjecture 1.1 est un cas particulier de la Conjecture 1.2, car les seuls translatés de sous-variétés abeliennes contenus dans une courbe de genre  $\geq 2$  sont de dimension 0 et en conséquence  $S = \text{card}(C \cap \Gamma) = \text{card}(C(K))$  dans ce cas ( $\Gamma = \mathcal{J}(C)(K)$ ). Toutefois, la Conjecture 1.2 assure que l'on peut prendre  $c(g, K) = c_1(g, g!, g)$  dans la Conjecture 1.1, en spécialisant dans la Conjecture 1.2  $\delta = g!$  et  $\Delta = g$  (ainsi le nombre de points  $K$ -rationnels sur une courbe ne dépendrait du corps de base qu'à travers le rang du groupe de Mordell-Weil de sa jacobienne).

Il résulte des travaux de T. De Diego [De] que la Conjecture 1.1 est conséquence d'une conjecture de J. Silverman (voir [Hi–Sil, Conjecture F.3.4(b), page 454], par exemple) sur le minimum des hauteurs normalisées des points de  $A(K)$  (problème de type Lang) et d'une majoration uniforme du nombre de points de torsion de  $A(K)$  (résultat type Merel, *confer ibidem*, Theorem F.4.1.1(iii), page 458). Toutefois, le premier point n'est établi dans le cas des courbes elliptiques que modulo une conjecture de L. Szpiro, *confer ibidem*, Conjecture F.3.2(a), page 453.

Dans la direction de la Conjecture 1.2 on dispose de la contribution majeure de G. Rémond :

**Théorème 1.3 ([Ré1], Thm. 2.1).** *Avec les notations et hypothèses de la Conjecture 1.2 il existe un réel  $c_2(A, \mathcal{L}, \Delta, r)$  tel que  $S \leq c_2(A, \mathcal{L}, \Delta, r)$ .*

L'explicitation du réel  $c_2(A, \mathcal{L}, \Delta, r)$  dépend en fait de l'obtention d'une bonne minoration de la hauteur normalisée des points de  $V \cap \Gamma$ .

Nous précisons ci-dessous la conjecture proposée dans [Da–Phi1]–I, à la lumière des résultats et conjectures obtenus dans le cas analogue des tores multiplicatifs (*confer* [Am–Dav, Da–Phi2]). Pour ce faire, commençons par introduire les deux notions entrant dans ces spéculations :

**Définition 1.4.** *Soit  $(A, \mathcal{L})$  une variété abélienne définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , munie d'un fibré très ample et symétrique  $\mathcal{L}$ , et soit  $V$  une sous-variété algébrique de  $A$ . On appelle indice d'obstruction de  $V$  relativement à  $\mathcal{L}$ , noté  $\omega_{\mathcal{L}}(V)$ , la quantité :*

$$\omega_{\mathcal{L}}(V) := \inf_{V \subset Z \subset A, \text{codim}_A(Z)=1} \{\deg_{\mathcal{L}}(Z)\} .$$

**Définition 1.5.** *Si  $V$  est une sous-variété algébrique de  $A$ ,  $\overline{\mathbf{Q}}$ -rationnelle, on définit le minimum essentiel<sup>3</sup> de  $\hat{h}_{\mathcal{L}}$  sur  $V$  comme :*

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\text{ess}}(V) := \sup_{Z \subset V, \text{codim}_V(Z)=1} \inf \left\{ \hat{h}_{\mathcal{L}}(x), x \in (V \setminus Z)(\overline{\mathbf{Q}}) \right\} .$$

---

<sup>3</sup>  $\hat{h}_{\mathcal{L}}$  désigne la hauteur normalisée déduite de la hauteur projective  $h \circ \varphi_{\mathcal{L}}$ , elle ne dépend que de  $\mathcal{L}$ .

On sait que le minimum essentiel est nul si et seulement si  $V$  est une sous-variété de torsion, *i.e.*  $V$  est un translaté d'une sous-variété abélienne par un point de torsion. C'est un résultat d'E. Ullmo pour les courbes dans leur jacobienne, répondant à une conjecture de F. Bogomolov, et de S. Zhang dans le cas général (*confer* [Ul, Zh]). On dispose aussi de minoration effective de ce minimum essentiel (*confer* [Da-Phi1]-I & II).

Nous pouvons maintenant énoncer la conjecture sur le minimum essentiel proposée dans [Da-Phi3] :

**Conjecture 1.3** ([Da-Phi3], **Conj. 1.5**). Soit  $(A, \mathcal{L})$  une variété abélienne de dimension  $g > 0$ , définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , munie d'un fibré très ample et symétrique  $\mathcal{L}$ , et soit  $V$  une sous-variété algébrique de  $A$  également définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , telle que  $V - V$  engendre  $A$ . Alors :

- (i) (*version faible*) il existe une fonction  $f(g, \deg_{\mathcal{L}}(A), \deg_{\mathcal{L}}(V)) > 0$  telle que :

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\text{ess}}(V) \geq f(g, \deg_{\mathcal{L}}(A), \deg_{\mathcal{L}}(V)) \cdot \max\{1, h_F(A)\} ;$$

- (ii) (*version forte*) il existe une fonction  $f(g) > 0$  telle que :

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\text{ess}}(V) \geq f(g) \frac{\deg_{\mathcal{L}}(A) \max\{1, h_F(A)\}}{\omega_{\mathcal{L}}(V)} ,$$

où  $h_F(A)$  désigne la hauteur de Faltings de  $A$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ .

On a alors (*confer loc. cit.*) :

**Théorème 1.6.** *La Conjecture 1.3, (i) entraîne la Conjecture 1.2.*

On voit ainsi que pour établir des cas de la Conjecture 1.2, il suffit de prouver la Conjecture 1.3 pour les variétés abéliennes concernées. Deux des auteurs traitent dans [Da-Phi3] le cas des puissances de courbes elliptiques (où la structure arithmétique est la mieux maîtrisée). Ils obtiennent ainsi une *famille algébrique* de variétés abéliennes pour laquelle la Conjecture 1.2 (i) est vraie. Cette dernière étant de nature géométrique (*i.e.* sur un corps algébriquement clos), la stabilité des énoncés par extension du corps de base est automatique. Le théorème principal de [Da-Phi3] est le suivant :

**Théorème 1.7** ([Da-Phi3], **Thm. 1.8**). Soit  $g \geq 2$  un entier,  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$  et  $V$  une sous-variété de  $E^g$  également définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ . On suppose  $E^g$  muni de sa polarisation canonique  $\mathcal{L}_0 : = \otimes_{i=1}^g \pi_i^*(\mathcal{O}(0_E))^{\otimes 3}$ , où  $\pi_i$  désigne la projection de  $E^g$  sur son  $i$ -ième

*facteur. Alors, si  $V$  n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne de  $E^g$ , on a*

$$(\dim(V) + 1)\hat{\mu}_{\mathcal{L}_0}^{ess}(V) \geq \frac{\hat{h}_{\mathcal{L}_0}(V)}{\deg_{\mathcal{L}_0}(V)} \geq \frac{\max\{1; h_F(E)\}}{10^{50} \deg_{\mathcal{L}_0}(V)^{16}} .$$

*Si  $(A, \mathcal{L})$  est une variété abélienne polarisée isogène à  $(E^g, \mathcal{L}_0)$  et  $W$  une sous-variété algébrique de  $A$  qui n'est pas translatée de sous-variété abélienne de  $A$ , toutes deux définies sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , on a*

$$\frac{\hat{h}_{\mathcal{L}}(W)}{\deg_{\mathcal{L}}(W)} \geq \frac{\max(1; h_F(A))}{10^{50} \deg_{\mathcal{L}}(W)^{16} \log(\deg_{\mathcal{L}}(A))} .$$

**Corollaire 1.8.** *Dans la situation du Théorème 1.7 on a*

$$\text{card}(V^\circ \cap E_{\text{tors}}^g) \leq (10^{2g+60} \deg_{\mathcal{L}_0}(V))^{(33)^{\dim(V)}}$$

*où  $V^\circ$  désigne le complémentaire de l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles contenus dans  $V$ . En particulier, si  $\dim(V) = 1$  alors  $V^\circ = V$ .*

Dans le Théorème 1.7 ci-dessus  $h_F(A)$  apparaît au numérateur avec exposant 1, tandis que dans les résultats antérieurs de [Da-Phi1]-II, qui eux sont valables pour toute variété abélienne  $A$ , figure un terme  $[K_0 : \mathbf{Q}]h(\varphi_{\mathcal{L}}(0_A))$  à une puissance négative dans la minoration du minimum essentiel. Plus précisément :

**Théorème 1.9 ([Da-Phi1]-II, Thm. 1.4).** *Soit  $(A, \mathcal{L})$  une variété abélienne principalement polarisée, définie sur un corps de nombres  $K_0$  et  $W$  une sous-variété algébrique de  $A$  qui n'est pas translatée de sous-variété abélienne de  $A$ , définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , on a*

$$\frac{\hat{h}_{\mathcal{L}}(W)}{\deg_{\mathcal{L}}(W)} \geq \frac{1}{2^{15g^3} \deg_{\mathcal{L}}(W)^{2g^2}} \cdot \frac{1}{([K_0 : \mathbf{Q}] \max(1; h_F(A)))^{g+1}} .$$

**Remarque 1.10.** Pour comparer au Théorème 1.4 de [Da-Phi1]-II on notera qu'on a  $h(\varphi_{\mathcal{L}}(0_A)) \leq 8g^4 \max(1; h_F(A))$ .

En reportant la minoration du Théorème 1.7 dans le Théorème 1.3 on obtient :

**Théorème 1.11 ([Da-Phi3], Thm. 1.9).** *Soit  $g \geq 2$  un entier et  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ ,  $V$  une sous-variété de  $E^g$  également définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$  et  $\Gamma \subset E^g(\overline{\mathbf{Q}})$  un sous-groupe de rang fini  $r$ . Alors, si*

$\mathcal{L}_0$  est la polarisation sur  $E^g$  décrite au Théorème 1.7, il existe un entier naturel  $S$  satisfaisant

$$S \leq \deg_{\mathcal{L}_0}(V)^{60(r+1)(g+1)^4(\dim(V)+1)^2+2},$$

des éléments  $x_1, \dots, x_S \in V \cap \Gamma$  et des sous-variétés abeliennes  $B_1, \dots, B_S$  de  $E^g$  tels que  $x_i + B_i \subset V$  pour  $i = 1, \dots, S$  et

$$V \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^S (x_i + B_i) \cap \Gamma.$$

**Remarque 1.12.** Dans le cas général d'une sous-variété algébrique  $W$ , définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , d'une variété abélienne polarisée  $(A, \mathcal{L})$ , définie sur un corps de nombres  $K_0$ , comme au Théorème 1.9, on a un résultat analogue au Théorème 1.11 avec la majoration (voir [Da-Phi1, -II, page 643]) :

$$S \leq ([K_0 : \mathbf{Q}] \max(1; h_F(A)) \deg_{\mathcal{L}}(W))^{2(r+1)g^{5(\dim(V)+1)^2}}.$$

Les auteurs remercient chaleureusement l'arbitre pour ses remarques précises et pertinentes sur une première version de ce texte. Ses indications nous ont en particulier permis d'améliorer grandement le Théorème 1.1.

## 2. Séries linéaires des produits de courbes elliptiques

Nous montrerons au § 3 comment construire des familles de courbes de genre prescrit dans un carré d'une courbe elliptique, satisfaisant (1.1). Ces familles ont pour bases des ouverts de Zariski d'espaces linéaires, nous montrerons de plus au § 4, en élaborant la méthode adoptée, que le bord de ces ouverts contient encore des familles de courbes satisfaisant également (1.1). Ces courbes seront éventuellement singulières et nous définissons le genre d'une telle courbe comme égal à celui d'une désingularisation. L'idée est simplement de découper les courbes cherchées dans la surface donnée en contrôlant strictement les singularités pouvant apparaître. Nous commençons par une étude indépendante des jets des sections de fibrés amples sur une surface lisse, puis sur le carré d'une courbe elliptique, utile pour le Théorème 4.2. Ceci nous permet en particulier d'introduire dans le présent contexte les constantes de Seshadri, dont l'utilisation en géométrie diophantienne nous semble devoir être positivement stimulée.

### 2.1. Fibrés et jets sur les surfaces

Soit  $X$  une surface projective irréductible, lisse, définie sur un corps  $K$  (de caractéristique 0) et  $m \in \mathbf{N}$  un entier, on considère  $m$  points

$P_1, \dots, P_m$  sur  $X$  et  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  en ces  $m$  points. La surface  $\tilde{X}$  est projective et lisse, on note  $F$  le diviseur exceptionnel dans  $\tilde{X}$  de l'éclatement  $\pi$ . Soit  $\mathcal{L}$  un fibré ample sur  $X$ , pour  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 2$ , on introduit le fibré  $\tilde{\mathcal{L}}_s := \pi^*(\mathcal{L})(-sF) := \pi^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-sF)$  sur  $\tilde{X}$ . Si  $\mathcal{K}_X$  désigne le fibré canonique de  $X$ , on souhaite trouver une condition assurant l'existence de sections de  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X$  qui sont des courbes dans  $X$  avec des singularités (d'ordre  $\leq s-2$ ) prescrites en les points  $P_i$ . Pour ce faire, on s'intéresse à l'amplitude du fibré  $\tilde{\mathcal{L}}_s$ , en effet :

**Lemme 2.1.** *Avec les notations ci-dessus, si  $\tilde{\mathcal{L}}_s$  est un fibré ample sur  $\tilde{X}$  alors l'application*

$$H^0(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X) \rightarrow H^0(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X / (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-1}))$$

est surjective, où  $\mathfrak{m}_{X, P}$  désigne le faisceau d'idéaux de définition de  $P$  sur  $X$ .

*Démonstration.* Comme  $\tilde{\mathcal{L}}_s$  est ample et  $\tilde{X}$  est projective, irréductible et lisse, le théorème d'annulation de Kodaira (confer [La, Thm. 4.2.1]) entraîne que

$$H^1(\tilde{X}; \tilde{\mathcal{L}}_s \otimes \mathcal{K}_{\tilde{X}}) = 0 \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{K}_{\tilde{X}}$  désigne le fibré canonique de  $\tilde{X}$ . On rappelle que  $\mathcal{K}_{\tilde{X}} = \pi^*(\mathcal{K}_X)(F)$ . Mais  $\tilde{\mathcal{L}}_s \otimes \mathcal{K}_{\tilde{X}} = \pi^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X)(-(s-1)F)$  et, en poussant (2.1) par  $\pi_*$ , on en déduit

$$\begin{aligned} 0 &= H^1(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X \otimes \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(s-1)F))) \\ &= H^1(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X \otimes (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-1})), \end{aligned}$$

puis la surjection de l'application de l'énoncé, car

$$H^1(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X \otimes (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-1}))$$

en est précisément le conoyau.  $\square$

Il nous faut maintenant déterminer pour quelles valeurs de  $s$  le fibré  $\tilde{\mathcal{L}}_s$  est ample sur  $\tilde{X}$ . Pour cela on utilise le critère de Seshadri qui exprime ce type de propriété en termes des constantes de Seshadri pour tout fibré  $\mathcal{L}$  sur n'importe quelle variété projective  $X$ .

**Définition 2.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{L}'$  un fibré sur une variété projective  $X'$  (de dimension  $\geq 1$ ) et  $P'_1, \dots, P'_m \in X'$ . On appelle constante de Seshadri de  $\mathcal{L}'$  en  $(P'_1, \dots, P'_m)$  le nombre

$$\varepsilon(P'_1, \dots, P'_m; \mathcal{L}') := \inf \left( \frac{\mathcal{L}' \cdot C'}{\sum_{i=1}^m \text{mult}_{P'_i}(C')} \right)$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes  $C'$ , irréductibles, contenues dans  $X'$  et contenant l'un au moins des points  $P'_1, \dots, P'_m$ .

**Remarque 2.3.** Cette définition n'est pas celle généralement adoptée dans la littérature : avec les notations du début du paragraphe  $\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})$  est plutôt défini comme le supremum des réels  $\varepsilon$  tels que  $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$  soit *numériquement effectif* (nef) (en étendant convenablement la définition de  $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  réel). Mais elle lui est classiquement équivalente et mieux appropriée pour des calculs, voir [Ba, § 8] et [La, chap. 5].

**Critère 2.4 (Seshadri).** Un fibré  $\mathcal{L}'$  sur une variété projective  $X'$  (de dimension  $\geq 1$ ) est ample si et seulement s'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout point  $P' \in X'$  et toute courbe irréductible  $C' \subset X'$  passant par  $P'$  on ait

$$\frac{\mathcal{L}' \cdot C'}{\text{mult}_{P'}(C')} \geq \varepsilon .$$

*Démonstration.* Voir [La, Thm. 1.4.13]. □

On déduit du Lemme 2.1 et de la Définition 2.2 le lemme d'interpolation suivant. Nous en explicitons une démonstration élémentaire reposant sur le critère 2.4 ; il s'agit en réalité simplement de vérifier le fait bien connu que  $\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})$  est aussi le supremum des réels  $\varepsilon > 0$  tels que  $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$  soit ample.

**Lemme 2.5.** Soit  $\mathcal{L}$  un fibré ample sur une surface projective, irréductible, lisse  $X$ , si la constante de Seshadri de  $\mathcal{L}$  en  $P_1, \dots, P_m$  satisfait

$$\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) > s$$

pour un entier  $s \geq 2$ , alors l'application

$$H^0(X; \mathcal{L}) \rightarrow H^0(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X / (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-1}))$$

est surjective.

*Démonstration.* On veut appliquer le critère de Seshadri à  $\tilde{\mathcal{L}}_s$ . Soit  $\tilde{P} \in \tilde{X}$  et  $\tilde{C} \subset \tilde{X}$  une courbe passant par  $\tilde{P}$ , pour minorer les quotients  $\frac{\tilde{\mathcal{L}}_s \cdot \tilde{C}}{\text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C})}$  distinguons selon que  $\tilde{C}$  est ou n'est pas composante du diviseur exceptionnel  $F$  de l'éclatement  $\pi$  introduit au début du paragraphe.

*Premier cas :*  $\tilde{C}$  n'est pas composante de  $F$ . Posons  $C := \pi(\tilde{C})$  et  $P := \pi(\tilde{P})$ , on a  $\tilde{\mathcal{L}}_s \cdot \tilde{C} = \mathcal{L} \cdot C - sF \cdot \tilde{C}$ , puis  $\text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C}) = \text{mult}_P(C)$  si  $P \notin \{P_1, \dots, P_m\}$  et  $\text{mult}_P(C) = F_P \cdot \tilde{C} \geq \text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C})$  si  $P \in \{P_1, \dots, P_m\}$  ( $F_P$  désigne alors la composante du diviseur exceptionnel  $F$  au-dessus

du point  $P \in X$ ). On a encore  $F \cdot \tilde{C} = \sum_{i=1}^m \text{mult}_{P_i}(C)$ , puis, par la Définition 2.2 :

$$F \cdot \tilde{C} = \sum_{i=1}^m \text{mult}_{P_i}(C) \leq \varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})^{-1} \mathcal{L} \cdot C . \quad (2.2)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathcal{L}}_s \cdot \tilde{C}}{\text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C})} &\geq (1 - s\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})^{-1}) \frac{\mathcal{L} \cdot C}{\text{mult}_P(C)} \\ &\geq (1 - s\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})^{-1}) \varepsilon(P; \mathcal{L}) . \end{aligned}$$

*Deuxième cas :*  $\tilde{C}$  est une composante de  $F$ . On vérifie alors  $\tilde{\mathcal{L}}_s \cdot \tilde{C} = -sF \cdot \tilde{C} = s$  car  $\tilde{C} \cdot \tilde{C} = -1$ . Par ailleurs,  $\text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C}) = 1$  car les composantes de  $F$  sont des espaces linéaires et  $\tilde{P} \in \tilde{C} \subset F$ , d'où directement  $\frac{\tilde{\mathcal{L}}_s \cdot \tilde{C}}{\text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C})} = s \geq 2$  dans ce cas.

En résumé des deux cas traités, on vérifie

$$\frac{\tilde{\mathcal{L}}_s \cdot \tilde{C}}{\text{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{C})} \geq \min \left( (1 - s\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})^{-1}) \varepsilon(\pi(\tilde{P}); \mathcal{L}) ; s \right) \quad (2.3)$$

pour tout point  $\tilde{P} \in \tilde{X}$  et toute courbe irréductible  $\tilde{C} \subset \tilde{X}$  passant par  $\tilde{P}$ . Le critère 2.4 entraîne alors d'une part que,  $\mathcal{L}$  étant supposé ample, il existe  $\varepsilon' > 0$  tel que  $\varepsilon(\pi(\tilde{P}); \mathcal{L}) \geq \varepsilon'$ , puis joint à (2.3) que le fibré  $\tilde{\mathcal{L}}_s$  est ample sur  $\tilde{X}$ , car  $\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) > s$ . Et enfin, le Lemme 2.1 montre que l'application

$$H^0(X; \mathcal{L}) \rightarrow H^0(X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X / (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-1}))$$

est surjective dès que  $\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) > s$ . □

**Remarque 2.6.** On comparera le Lemme 2.5 à [La, Prop. 5.1.19, (i)]. Il s'étend de plus aux variétés projectives, irréductibles, lisses, de dimension  $d$  quelconque en y supposant  $s \geq d$  et en remplaçant  $s - 1$  par  $s + 1 - d$  dans sa conclusion.

## 2.2. Fibrés et jets sur les carrés de courbes elliptiques

On considère une courbe elliptique  $E$  définie sur un corps  $K$  (de caractéristique 0) et on reprend la situation étudiée précédemment avec  $X = E^2$ , qui est bien une surface projective, irréductible et lisse. Soit  $a, b \in \mathbf{N}^*$  des entiers, on pose

$$\mathcal{L} := \mathcal{O}(a(E \times \{0_E\}) + b(\{0_E\} \times E)) ,$$

c'est un fibré ample sur  $X$  mais on supposera de fait  $a, b \geq 3$  de sorte que  $\mathcal{L}$  sera très ample. On a aussi  $\mathcal{K}_X \simeq \mathcal{O}_X$ , car  $X$  est maintenant une surface abélienne. Soit  $m, s \in \mathbf{N}$ ,  $s \geq 2$ , les entiers  $a$  et  $b$  étant donnés assez grands en fonction de  $m$  et  $s$  on considère des points  $P_1, \dots, P_m \in E(K)$  de sorte qu'aucune paire n'appartienne à une même courbe  $E' \subset X$  de genre 1 et degré  $\deg_{\mathcal{L}}(E') < m \min(a; b)$ . Cette condition est vide si  $m = 1$ , par contre elle peut ne pas être satisfaite si  $\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) = 0$  et  $m$  est assez grand<sup>4</sup>. Nous supposons dans la suite  $\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) \geq 1$ . Le Lemme 2.5 montre que si

$$\varepsilon(P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) > s$$

on peut construire des sections de  $\mathcal{L}$  sur  $X$  ayant des singularités d'ordre  $s - 2$  spécifiées en chacun des  $P_i$ . Chaque nœud qu'on pourra ainsi imposer fera chuter le genre du lieu des zéros de cette section de une unité par rapport aux sections générales (voir application au paragraphe suivant 4).

Toutefois nous devons nous assurer que les sections que nous construisons n'ont pas de singularité en dehors de  $\{P_1, \dots, P_m\}$ . Pour cela nous montrons qu'il existe des sections ayant les singularités voulues en  $P_1, \dots, P_m$  et distinguant deux autres points donnés  $P \neq Q \in X \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ . En vue d'appliquer le Lemme 2.5 dans ce sens, calculons la constante de Seshadri  $\varepsilon(Q_1, \dots, Q_\ell, P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})$ .

Comme  $X$  est une surface abélienne on a, d'après un théorème de T. Bauer, [Ba, prop. 8.3],

$$\varepsilon(Q_1, \dots, Q_\ell, P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) \geq \begin{cases} \frac{\sqrt{2 \deg_{\mathcal{L}}(X)}}{\ell + m} & \text{si } \ell + m \geq 4 \\ \sqrt{\frac{(8 - \ell - m) \deg_{\mathcal{L}}(X)}{8(\ell + m)}} & \text{si } \ell + m \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

<sup>4</sup> Par ailleurs, la condition est automatiquement vérifiée en prenant les coordonnées des  $P_i - P_j$ , pour  $i \neq j$ , linéairement indépendantes sur  $\text{End}(E)$ . Ceci conduit également à étendre le corps de nombres; en particulier si  $K$  est algébriquement clos on pourrait se passer de la condition sur le degré de  $E'$ .

ou

$$\varepsilon(Q_1, \dots, Q_\ell, P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) \geq \inf \left( \frac{\deg_{\mathcal{L}}(E')}{\text{card}(i, j; Q_i, P_j \in E')} \right)$$

l'infimum étant pris sur toutes les courbes  $E' \subset X$  de genre 1 passant par au moins l'un des points  $Q_i$  ou  $P_j$ . Mais au plus un d'entre les points  $P_1, \dots, P_m$  appartient à une courbe  $E'$  de genre 1 et degré  $\deg_{\mathcal{L}}(E') < \frac{\ell+m}{\ell+1} \min(a; b)$ , donnée. Ainsi on a pour toute courbe  $E' \subset X$  de genre

$$1 : \frac{\deg_{\mathcal{L}}(E')}{\text{card}(i, j; Q_i, P_j \in E')} \geq \frac{1}{\ell+1} \min(a; b; \deg_{\mathcal{L}}(E')). \text{ De plus,}$$

$$\deg_{\mathcal{L}}(E') = a(E \times \{0_E\}) \cdot E' + b(\{0_E\} \times E) \cdot E' \geq \min(a; b)$$

et  $\deg_{\mathcal{L}}(X) = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} = 2ab$ , d'où finalement  $\varepsilon(Q_1, \dots, Q_\ell, P_1, \dots, P_m; \mathcal{L})$  minoré par

$$\begin{cases} \min \left( \frac{a}{\ell+1}; \frac{b}{\ell+1}; \frac{2\sqrt{ab}}{\ell+m} \right) & \text{si } \ell + m \geq 4 \\ \min \left( \frac{a}{\ell+1}; \frac{b}{\ell+1}; \sqrt{\frac{(8-\ell-m)ab}{4(\ell+m)}} \right) & \text{si } \ell + m \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Il résulte donc du Lemme 2.5 (rappelons que  $\mathcal{K}_X \simeq \mathcal{O}_X$ ) :

**Lemme 2.7.** *Soit  $E$  une courbe elliptique,  $K$  un corps de caractéristique 0 tel que  $\text{rang}_{\mathbb{Z}}(E(K)) \geq 1$  et  $\ell, m, s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 2$ , des entiers, il existe des points  $P_1, \dots, P_m \in E^2(K)$  tels que pour tous entiers  $a, b > (\ell + 1)s$  satisfaisant*

$$ab > \begin{cases} \left( \frac{(\ell + m)s}{2} \right)^2 & \text{si } \ell + m \geq 4 \\ \frac{4(\ell + m)s^2}{8 - \ell - m} & \text{si } \ell + m \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

et tous  $Q_1, \dots, Q_\ell \in E^2(\overline{K})$ , l'application

$$\begin{aligned} & H^0(X; \mathcal{L}) \\ & \longrightarrow H^0 \left( X; \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X / \left( \mathfrak{m}_{X, Q_1}^{s-1} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{X, Q_\ell}^{s-1} \cap \mathfrak{m}_{X, P_1}^{s-1} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{X, P_m}^{s-1} \right) \right) \end{aligned}$$

soit surjective.

*Démonstration.* On vérifie simplement que la condition

$$\varepsilon(Q_1, \dots, Q_\ell, P_1, \dots, P_m; \mathcal{L}) > s$$

du Lemme 2.5 résulte des conditions imposées à  $a$  et  $b$ , via (2.4).  $\square$

**Corollaire 2.8.** *Soit  $E$  une courbe elliptique et  $m \geq 3$ ,  $s \geq 3$ , des entiers, il existe des points  $P_1, \dots, P_m$  sur  $X = E^2$  tels que pour tous entiers  $a, b > 3(s-1)$  satisfaisant  $ab > \left(\frac{(m+2)(s-1)}{2}\right)^2$  et  $\mathcal{L}$  le fibré  $\mathcal{O}(a(E \times \{0_E\}) + b(\{0_E\} \times E))$ , le diviseur d'une section générale de  $\mathcal{L} \otimes (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-2})$  soit géométriquement irréductible dans  $X$ .*

*Démonstration.* Notre hypothèse sur  $a$  et  $b$  entraîne que les hypothèses du Lemme 2.7 sont satisfaites pour  $\ell = 1, 2$  et  $s$  remplacé par  $s-1$  (comme  $m \geq 3$  on a  $\ell + m \geq 4$ ). Le Lemme 2.7 (avec  $\ell = 1$  et  $s$  remplacé par  $s-1$ ) montre qu'en tout point  $Q \notin \{P_1, \dots, P_m\}$  il existe des sections de  $\mathcal{M} := \mathcal{L} \otimes (\cap_{i=1}^m \mathfrak{m}_{X, P_i}^{s-2})$  ne s'annulant pas en  $Q$ . On en déduit que l'application rationnelle  $\varphi_{\mathcal{M}} : X \rightarrow \mathbf{P}(H^0(X; \mathcal{M}))$  est régulière sur  $X \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ . De même, pour tout couple de points  $P, Q \in X \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$  le Lemme 2.7 (cette fois avec  $\ell = 2$  et toujours  $s$  remplacé par  $s-1$ ) montre qu'il existe une section de  $\mathcal{M}$  s'annulant en  $P$  et pas en  $Q$ , il en résulte que  $\varphi_{\mathcal{M}}$  est injective dans  $X \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$  et son image est de dimension 2. Si maintenant  $\sigma$  est une section suffisamment générale de  $\mathcal{M}$  et  $Z$  son lieu des zéros privé des points  $P_1, \dots, P_m$ , alors  $Z$  est l'image inverse par  $\varphi_{\mathcal{M}}$  d'un hyperplan de  $\mathbf{P}(H^0(X; \mathcal{M}))$  et c'est donc une sous variété irréductible d'après le théorème de Bertini, voir [La, Thm. 3.3.1], car  $\dim(\varphi_{\mathcal{M}}(X \setminus \{P_1, \dots, P_m\})) > 1$ .  $\square$

**Remarque 2.9.** On dispose d'une autre démonstration du Lemme 2.8 n'imposant les conditions du Lemme 2.7 que pour  $\ell = 1$  et  $s$  remplacé par  $s-1$ . Il s'agit de remarquer qu'avec ces conditions le fibré  $\tilde{\mathcal{L}}_{s-2}$  est ample et sans point base sur  $\tilde{X}$ , ce qui entraîne que le morphisme qu'il induit est fini. On applique ensuite le théorème de Bertini aux sections de ce fibré dans  $\tilde{X}$  et on obtient le résultat cherché en redescendant sur  $X$ .

### 3. Construction géométrique

#### 3.1. Familles de courbes

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps  $K$  (de caractéristique 0) et  $\mathcal{L}$  un fibré, également défini sur  $K$ , ample et sans point base sur  $E^2$ . On sait alors par [La, Cor. 1.2.15] que l'application  $\varphi_{\mathcal{L}} : E^2 \rightarrow \mathbf{P}(H^0(E^2; \mathcal{L}))$  associée à  $\mathcal{L}$ , est finie et donc  $\dim(\varphi_{\mathcal{L}}(E^2)) = 2$ . On identifie  $\mathbf{P}(H^0(E^2; \mathcal{L}))$  à  $\mathbf{P}_n$ , où  $n+1 := \dim(H^0(E^2; \mathcal{L}))$ , et on note  $\pi : \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{P}_n$  le pinceau dans  $E^2$  associé à  $\mathcal{L}$  et paramétré par  $\mathbf{P}_n$ . Comme  $E^2$  est une surface lisse et  $\dim(\varphi_{\mathcal{L}}(E^2)) > 1$ , le théorème de Bertini (voir [La, Thm. 3.3.1] et [Gr–Har, § 1.1, p. 137]) entraîne que les fibres

$\pi^{-1}(y)$  sont des courbes irréductibles et lisses, dès que  $y \in \mathbf{P}_n$  évite un diviseur  $D_{\mathcal{L}} \subset \mathbf{P}_n$ , dont on peut majorer le degré par  $12 \deg(\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2))^3 = 108(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L})^3$ .

Pour voir cela considérons le pinceau  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  au travers de  $\psi := \varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}} \times \pi :$

$$\psi : \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} (\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2) \times \mathbf{P}_n) \cap \mathcal{H} \subset \mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n$$

où  $m+1 = \dim(H^0(E^2; \mathcal{L}^{\otimes 3}))$  et  $\mathcal{H}$  désigne la variété  $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$  est le produit scalaire dans  $\mathbf{P}_n$ )

$$\psi \left( \{ (x, y) \in E^2 \times \mathbf{P}_n; \langle \varphi_{\mathcal{L}}(x), y \rangle = 0 \} \right) .$$

On vérifie facilement  $\dim(\psi(\mathcal{F}_{\mathcal{L}})) = n + 1$  et que l'image de  $\psi(\mathcal{F}_{\mathcal{L}})$  par la première projection  $\pi_1$  sur  $\mathbf{P}_n$  est surjective sur  $\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2)$ . Ainsi  $\psi(\mathcal{F}_{\mathcal{L}})$  se présente comme une famille de courbes au-dessus de  $\mathbf{P}_n$  par la seconde projection  $\pi_2$ . Pour  $y \in \mathbf{P}_n$  le lieu singulier de  $\pi_2^{-1}(y)$  est défini dans  $\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2)$  par des formes de degré  $\leq 2 \deg(\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2))$  dont les coefficients sont des formes de degré  $\deg(\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2))$  en  $y$ . En prenant une forme de Chow de  $\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2)$  d'indice  $2 \deg(\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2))$  et en la spécialisant en les coefficients des formes définissant le lieu singulier de  $\pi_2^{-1}(y)$  on trouve des hypersurfaces de  $\mathbf{P}_n$  découpant  $D_{\mathcal{L}}$  et de degré  $\leq 12 \deg(\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2))^3$  (la forme de Chow considérée est de degré  $3 \cdot (2 \deg(\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes 3}}(E^2)))^2$  en les coefficients des formes définissant le lieu singulier de  $\pi_2^{-1}(y)$ ).

Complétons nos informations sur les familles construites ci-dessus. On note  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}(3(\{0\} \times E) + 3(E \times \{0\}))$ .

**Lemme 3.1.** *Dans la situation ci-dessus soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g \geq 2$ , l'ensemble des applications rationnelles  $C \rightarrow E^2$  envoyant  $C$  sur une courbe de la famille  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  de genre  $g$  est fini, de cardinal  $\leq (24\mathcal{L} \cdot C)^2 (8^g \mathcal{L}_0 \cdot C)^{8g^3}$ .*

*Démonstration.* D'après [Se, chap. V, n° 9, thm. 2 & n° 11, page 98] toute application rationnelle  $\varphi : C \rightarrow E^2$  se factorise *via* la jacobienne  $J$  de  $C$  par un homomorphisme  $F \in \text{Hom}(J; E^2)$  composé avec une translation de  $E^2$ . Mais il n'existe qu'un nombre fini  $\leq (\mathcal{L} \cdot C)^2$  de translations de  $E^2$  stabilisant  $\mathcal{L}$  et il n'existe qu'un nombre fini d'homomorphismes  $F$  de  $J$  dans  $E^2$  tels que  $F(C) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ . En effet, pour  $i = 1, 2$ ,  $\ker(\pi_i \circ F)$ , où  $\pi_i$  désigne les projections de  $E^2$  sur chacun de ses facteurs, est un sous-groupe algébrique de  $J$  satisfaisant

$$\begin{aligned} \deg(\ker(\pi_i \circ F)) &\leq \deg(\ker(\pi_i \circ F) \cdot C) = \deg(\pi_i^* \{0\} \cdot F_*(C)) \\ &\leq \mathcal{L}_0 \cdot C . \end{aligned}$$

On déduit de la proposition 4.1 de [Ré1] que  $\ker(\pi_i \circ F)$  appartient à un ensemble fini, de cardinal  $\leq (8^g \mathcal{L}_0 \cdot C)^{8g^3}$ , de sous-groupes algébriques de  $J$ . De plus, deux homomorphismes non constants de  $\text{Hom}(J; E)$  ayant le même noyau diffèrent par un automorphisme de  $E$  et le nombre de ces automorphismes est  $\leq 24$ .  $\square$

Afin de poursuivre ce calcul nous nous restreignons à des fibrés amples sans point base de la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}(a(\{0\} \times E) + b(E \times \{0\}) + c\Delta) . \quad (3.1)$$

**Lemme 3.2.** *Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(a(\{0\} \times E) + b(E \times \{0\}) + c\Delta)$  un fibré sur  $E^2$ , où  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $c \in \mathbb{N}$  et  $\Delta$  la diagonale de  $E^2$ . Alors, si  $a + c$  et  $b + c$  sont supérieurs à 2 le fibré  $\mathcal{L}$  est ample et sans point base.*

*Démonstration.* Il suffit de le voir pour  $a = b = 2$ ,  $c = 0$  et  $a = b = c = 1$ . Le premier cas découle du fait que  $\mathcal{L}_0^{\otimes 2}$  induit un plongement projectif de la variété de Kummer  $E/\pm 1$ . Traitons donc le deuxième cas. On notera que  $\mathcal{L}$  est ample puisque  $\mathcal{M} = \mathcal{O}(\Delta)$  est effectif donc nef,  $E^2$  étant une variété abélienne et  $\pi_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \pi_2^* \mathcal{L}_0$  est ample.

On commence par calculer le groupe  $K(\mathcal{L})$ . On rappelle qu'étant donné un fibré en droites  $\mathcal{N}$ , l'application  $\phi_{\mathcal{N}}$  (de  $A = E^2$  vers  $\hat{A}$ ) est définie par  $x \mapsto \tau_x^* \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}^{-1}$ ; on peut identifier  $A$  et  $\hat{A}$  via  $\phi_{\pi_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \pi_2^* \mathcal{L}_0}$ .

Avec ces normalisations, on vérifie que  $\phi_{\mathcal{M}}$  est donné par  $(a, b) \in E \times E \mapsto (a - b, b - a)$ ; soit  $y \in E$  la restriction de  $\mathcal{M}$  à  $E \times \{y\}$  (identifié à  $E$ ) est  $\tau_{-y}^* \mathcal{L}_0$  et donc  $\tau_{(a,b)}^* \mathcal{M}_{|E \times \{y\}}$  est  $\tau_{a-b-y}^* \mathcal{L}_0$  d'où, par le théorème du carré (confer [Bi-Lan], page 33)

$$\begin{aligned} \tau_{(a,b)}^* \mathcal{M}_{|E \times \{y\}} \otimes (\mathcal{M}_{|E \times \{y\}})^{-1} &= \tau_{a-b}^* \mathcal{L}_0 \otimes \tau_{-y}^* \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0^{-1} \otimes (\tau_{-y}^* \mathcal{L}_0)^{-1} \\ &= \phi_{\mathcal{L}_0}(a - b) . \end{aligned}$$

De même, calculons la restriction de  $\tau_{(a,b)}^* \mathcal{M}$  à  $\{0\} \times E$  (également identifié à  $E$ ). Comme  $\mathcal{M}_{|\{0\} \times E} = [-1]^* \mathcal{L}_0$ , on a  $\tau_{(a,b)}^* \mathcal{M}_{|\{0\} \times E} = ([-1] \circ \tau_{b-a})^* \mathcal{L}_0$  et donc ( $\mathcal{L}_0$  est symétrique)

$$\begin{aligned} \tau_{(a,b)}^* \mathcal{M}_{|\{0\} \times E} \otimes (\mathcal{M}_{|\{0\} \times E})^{-1} &= \tau_{b-a}^* ([-1]^* \mathcal{L}_0) \otimes ([-1]^* \mathcal{L}_0)^{-1} \\ &= \phi_{\mathcal{L}_0}(b - a) . \end{aligned}$$

Par le *see-saw principle* (confer [Bi-Lan], page 569, Corollaire A9), on a bien l'égalité annoncée.

Comme  $\phi_{\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2} = \phi_{\mathcal{N}_1} + \phi_{\mathcal{N}_2}$  (confer par exemple [Bi-Lan], page 36, Corollaire 2.4.6, point (b))  $\phi_{\mathcal{L}}(x, y) = (2x - y, 2y - x)$  et  $K(\mathcal{L}) = \ker(\phi_{\mathcal{L}}) = \{(x, 2x), x \in E[3]\}$ . Comme  $(\frac{1}{2}\mathcal{L} \cdot \mathcal{L})^2 = |K(\mathcal{L})|$  (confer par

exemple [Bi–Lan] page 65, Corollaire 3.6.2), on trouve  $\frac{1}{2}\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} = 3$ . La polarisation induite par  $\mathcal{L}$  est donc nécessairement de type  $(1, 3)$  (c'est la seule paire d'entiers positifs  $(d_1, d_2)$  tels que  $d_1 \mid d_2$  et  $d_1 d_2 = 3$ ).

On note maintenant que la polarisation induite par  $\mathcal{L}$  est irréductible; en effet, si tel n'était pas le cas, il existerait une courbe (elliptique)  $C$  telle que  $C \cdot C = 0$  et  $C \cdot \mathcal{L} = 1$  (*confer* [Bi–Lan], Lemme 10.4.6, page 299). Mais, ceci n'est pas possible, car  $C \cdot \mathcal{L} \geq C \cdot (\pi_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \pi_2^* \mathcal{L}_0)$  (car  $\mathcal{M}$  est effectif) donc  $C \cdot \mathcal{L} = 1$  entraîne  $C \cdot (\pi_1^* \mathcal{L}_0 \otimes \pi_2^* \mathcal{L}_0) = 1$  car ce dernier fibré est ample (on ne peut donc obtenir 0) et par suite  $C = E \times \{0\}$  ou  $\{0\} \times E$ , mais, dans chacun de ces deux cas  $C \cdot \mathcal{M} = 1$  et donc au total  $C \cdot \mathcal{L}$  est toujours  $\geq 2$ .

Mais, on sait que les polarisations irréductibles de type  $(1, 3)$  sur les surfaces abeliennes sont sans point base (*confer* [Bi–Lan, page 283, Lemme 10.1.2, point (a)]). D'où le lemme.  $\square$

**Remarque 3.3.** On peut également voir ce résultat avec de la géométrie des courbes (elliptiques) : les éventuels points bases de  $\mathcal{L}$  sont contenus dans le diviseur  $F = (0 \times E) \cup (E \times 0) \cup \Delta$  (où  $\Delta$  désigne toujours la diagonale). Soit  $D$  une composante irréductible de  $F$ , on a la suite exacte courte:

$$0 \rightarrow H^0(E^2, \mathcal{O}(F - D)) \rightarrow H^0(E^2, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(D, \mathcal{L}) \rightarrow 0$$

puisque, par le théorème d'annulation de Kodaira  $H^1(E^2, \mathcal{O}(F - D)) = 0$  ( $F - D$  est ample). Quant à  $H^0(D, \mathcal{L})$ , on a  $\deg_{\mathcal{L}}(D) = 2$  et, puisque  $D$  est une courbe de genre 1,  $\mathcal{L}$  restreint à  $D$  est sans point base. Utilisant la suite exacte, on montre que  $\mathcal{L}$  est sans point base sur  $D$  et donc qu'il n'y en a pas du tout.

Considérons donc, grâce au Lemme 3.2,  $\mathcal{L}$  de la forme (3.1) avec  $a, b \in \mathbf{N}^*$ ,  $c \in \mathbf{N}$ ,  $a + c, b + c \geq 2$ , notons  $C_y = \pi^{-1}(y) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  et calculons les invariants de cette courbe lorsque  $y \in \mathbf{P}_n \setminus D_{\mathcal{L}}$ . En remarquant que le diviseur canonique  $\mathcal{K}_{E^2}$  de  $E^2$  est trivial et que  $C_y$  est lisse, on a par la formule d'adjonction (*cf.* [Gr–Har, page 505 et suivantes])

$$g(C_y) = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_{E^2} + C_y) \cdot C_y + 1 = \frac{1}{2}C_y \cdot C_y + 1 = \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}}{2} + 1.$$

Posons  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{O}(3(\{0\} \times E) + 3(E \times \{0\}))$  et  $\varphi_{\mathcal{L}_0}$  le plongement de  $E^2$  dans  $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2 \hookrightarrow \mathbf{P}_8$  associé. On a

$$\deg(\varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y)) = 3((\{0\} \times E) \cdot C_y) + 3((E \times \{0\}) \cdot C_y),$$

et comme

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}(a(\{0\} \times E) + b(E \times \{0\}) + c\Delta)$$

et

$$\begin{aligned}(E \times \{0\}) \cdot C_y &= a + c \\ (\{0\} \times E) \cdot C_y &= b + c\end{aligned}$$

on vérifie  $\deg(\varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y)) = 3(a+b+2c)$ . De même, l'expression de  $g(C_y)$  donne dans ce cas  $g(C_y) = \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}}{2} + 1 = ab + ac + bc + 1$ . Et enfin on calcule par le théorème de Riemann-Roch (*confer* [Bi-Lan, Thm. 3.6.3 et 3.5.5, pages 64 et 65])  $n+1 = \dim(H^0(E^2; \mathcal{L})) = \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}}{2!} = ab + ac + bc$ .

En résumé on a :

**Lemme 3.4.** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps  $K$  (de caractéristique 0), on plonge son carré  $E^2$  dans  $\mathbf{P}_8$  par le fibré  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{O}(3(E \times \{0\}) + 3(\{0\} \times E))$ . Pour tous entiers  $a, b \in \mathbf{N}^*$  et  $c \in \mathbf{N}$  satisfaisant  $a + c, b + c \geq 2$ , il existe une famille non constante, définie sur  $K$ ,*

$$\mathcal{F}_{a,b,c} \subset E^2 \times \mathbf{P}_{ab+ac+bc-1} \longrightarrow \mathbf{P}_{ab+ac+bc-1} \setminus D_{a,b,c}$$

*de courbes irréductibles, lisses, de genre  $ab + ac + bc + 1$  et degré  $3(a + b + 2c)$  dans  $\varphi_{\mathcal{L}_0}(E^2) \subset \mathbf{P}_8$ , où  $D_{a,b,c}$  désigne un diviseur de  $\mathbf{P}_{ab+ac+bc-1}$  de degré  $\leq 864(ab + ac + bc)^3$ .*

*Démonstration.* On pose  $\mathcal{F}_{a,b,c} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  et  $D_{a,b,c} = D_{\mathcal{L}}$  pour le fibré  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(a(\{0\} \times E) + b(E \times \{0\}) + c\Delta)$  précédent.  $\square$

### 3.2. Démonstration du Théorème 1.1

Soit  $K$  un corps de nombres et  $E$  une courbe elliptique définie sur  $K$ . Dans la situation du Lemme 3.4, en appliquant le Théorème 1.11 à chaque courbe  $V = \varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y) \subset \varphi_{\mathcal{L}_0}(E^2)$  fournie par la famille  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  lorsque  $y \in (\mathbf{P}_{ab+ac+bc-1} \setminus D_{a,b,c})(K)$ , on obtient ( $\dim(V) = 1$ ) :

$$\begin{aligned}\text{card}(C_y(K)) &\leq \deg(\varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y))^{60.3^{18}(2\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K))+1)} \\ &\leq (3(a + b + 2c))^{60.3^{18}(2\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K))+1)}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

**Démonstration du Théorème 1.1 :** si  $g = 2k + 2$  avec  $k \geq 1$  on applique le Lemme 3.4 avec  $a = k$  et  $b = c = 1$ . Si  $g = 2k + 1$  avec  $k \geq 2$  on prend  $a = k$ ,  $b = 2$  et  $c = 0$ . On vérifie dans les deux cas  $g = ab + ac + bc + 1$  et  $3(a + b + 2c) \leq 4g \leq g^2$ .

Pour  $y \in (\mathbf{P}_{g-2} \setminus D_g)(K)$  (on a  $ab + ac + bc - 1 = g - 2$  et on pose  $D_g := D_{a,b,c}$ ) les courbes  $C_y$  sont définies sur  $K$ , absolument irréductibles, lisses, de genre  $g$  et satisfont, par (3.2) :

$$\text{card}(C_y(K)) \leq g^{120.3^{18}(2\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K))+1)}.$$

On considère alors la courbe elliptique particulière définie sur  $\mathbf{Q}$ , d'équation de Weierstrass :  $Y^2Z = X^3 - XZ^2$ , dont le discriminant est 64. Les points de 2-torsion de  $E$  sont rationnels sur  $\mathbf{Q}$  (ce sont les seuls points de torsion rationnels sur  $\mathbf{Q}$ ) et on a donc par la 2-descente :

$$\begin{aligned} \text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) &\leq \text{rang}_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}(E(K)/[2]E(K)) \\ &\leq 4([K : \mathbf{Q}] + h_2(K)) , \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $h_2(K)$  désigne le rang sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  de la 2-partie  $\mathcal{H}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  du groupe des classes d'idéaux de l'anneau des entiers de  $K$ . On vérifie enfin  $9.120 \leq 3^7$  pour conclure l'estimation numérique. Pour la dernière inégalité de (3.3) on pourra consulter l'exercice 8.1, page 235, de [Si] ou vérifier directement que deux points  $(x : y : 1)$  et  $(x' : y' : 1)$  de  $E(K)$  diffèrent d'un élément de  $[2]E(K)$  si et seulement si  $\frac{x-1}{x'-1}$  et  $\frac{x+1}{x'+1}$  sont des carrés dans  $K^*$ . Comme les valuations de ces quotients sont paires pour toutes les places finies de  $K$  ne divisant pas 2, on en déduit que le nombre de conditions que chaque quotient doit satisfaire pour être un carré dans  $K^*$  est au plus

$$\text{card}((U/U^2) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{[K:\mathbf{Q}]} \times (\mathcal{H}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) \leq 2^{2[K:\mathbf{Q}] + h_2(K)} ,$$

où  $U$  désigne le groupe des unités de  $K$ .

Enfin, la dernière partie de l'énoncé du Théorème 1.1 découle directement du Lemme 3.1, car  $\mathcal{L} \cdot C = 2(ab + ac + bc) = 2g - 2$  et  $\mathcal{L}_0 \cdot C = 3(a + b + 2c) \leq 4g$ .  $\square$

**Remarque 3.5.** La version de (3.2) déduite de la Remarque 1.12 suffirait, modulo une perte dans la valeur de la constante numérique, pour établir le Théorème 1.1.

Toutefois, en utilisant la force du Théorème 1.11 quant à la dépendance en  $E$ , on peut faire varier la courbe elliptique dans la construction précédente et obtenir :

**Théorème 3.6.** *Soit  $g \geq 4$  un entier, il existe une infinité de familles de base  $\mathbf{P}_{g-2}$ , non constantes et définies sur  $\mathbf{Q}$ , de courbes de genre  $g$  satisfaisant pour tout corps de nombres  $K$  et tout  $y \in \mathbf{P}_{g-2}(K)$  en dehors d'un diviseur de  $\mathbf{P}_{g-2}$  de degré  $\leq 864(g-1)^3$  :*

$$\text{card}(C_y(K)) \leq g^{3^{23}(\text{rang}_{\mathbf{Z}}(\text{Jac}(C_y)(K)) + 1)} .$$

*Démonstration.* On reprend le début de la démonstration du Théorème 1.1 et on laisse la courbe elliptique définie sur  $\mathbf{Q}$  varier librement.

On remarque simplement que pour tout  $y \in (\mathbf{P}_{g-2} \setminus D_g)(K)$ , il existe, *confer* [Se, chap. V, n° 9, thm. 2 & n° 11, page 98], un homomorphisme non constant  $F : \text{Jac}(C_y) \rightarrow E$  défini sur  $K$ , d'où résulte

$$\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) \leq \text{rang}_{\mathbf{Z}}(\text{Jac}(C_y)(K)) .$$

En effet, si  $u_1, \dots, u_r \in E(K)$  est une base du groupe de Mordell-Weil on choisit des points  $v_i \in F^{-1}(u_i)$  et on pose  $w_i = \sum_{\sigma(v_i); \sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)} \sigma(v_i) \in \text{Jac}(C_y)(K)$  pour  $i = 1, \dots, r$ . On vérifie sans peine que  $w_1, \dots, w_r$  sont  $\mathbf{Z}$ -linéairement indépendants dans  $\text{Jac}(C_y)(K)/\text{Jac}(C_y)(K)_{\text{tors}}$  car, le morphisme  $F$  étant défini sur  $K$ , pour  $m_1, \dots, m_r \in \mathbf{Z}$  on a  $F(m_1 w_1 + \dots + m_r w_r) = \delta_1 m_1 u_1 + \dots + \delta_r m_r u_r$ , où  $\delta_i$  désigne le nombre de conjugués sur  $K$  de  $v_i$ .  $\square$

#### 4. Courbes singulières

Dans l'idée de tester la Conjecture 1.1, on peut se demander si les courbes (singulières) exclues des familles  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  construites au § 3.1 satisfont encore (1.1). Dans ce sens nous pouvons exhiber, grâce aux outils du § 2, des sous-familles intéressantes :

**Lemme 4.1.** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps  $K$  (de caractéristique 0) satisfaisant  $\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) \geq 1$ , on plonge son carré  $E^2$  dans  $\mathbf{P}_8$  par le fibré  $\mathcal{L}_0 := (3(E \times \{0\}) + 3(\{0\} \times E))$ . Pour tous entiers  $a, b > 9$  satisfaisant  $ab \geq 144$  et  $i = 0, \dots, m$ , où  $m$  est le plus grand entier  $< \frac{\sqrt{ab}}{2}$ , il existe des sous-familles non constantes de la famille  $\pi : \mathcal{F}_{a,b,0} \rightarrow \mathbf{P}_{ab-1}$ , définies sur  $K$  :*

$$\pi^{-1}(D^{(m)}) \subset \mathcal{F}^{(m)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \pi^{-1}(D^{(0)}) \subset \mathcal{F}_{a,b,0}$$

où  $D_{a,b,0} = D^{(0)} \supset \dots \supset D^{(m)}$  sont des sous-ensembles algébriques de  $\mathbf{P}_{ab-1}$ . De plus,

$$\pi : \mathcal{F}^{(i)} \longrightarrow L^{(i)} \setminus D^{(i)}$$

est une famille de courbes irréductibles de genre  $ab + 1 - i$  et degré  $3(a + b)$  dans  $\varphi_{\mathcal{L}_0}(E^2) \subset \mathbf{P}_8$ , avec  $L^{(i)}$  sous-variété linéaire de  $\mathbf{P}_{ab-1}$  de codimension  $3i$ .

*Démonstration.* On a  $\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) \geq 1$  et les entiers  $a, b > 9$  sont tels que  $ab \geq 144$ . Comme  $m$  est le plus grand entier  $< \frac{\sqrt{ab}}{2}$ , les hypothèses du Lemme 2.7 avec soit  $\ell = 0$  et  $s = 4$ , soit  $\ell = 1, 2$  et  $s = 3$ , et de son Corollaire 2.8 sont satisfaites. Ce Lemme 2.7 montre alors qu'on a une chaîne d'ensembles algébriques

$$\mathbf{P}_{ab-1} = L^{(0)} \supset D_{a,b,0} = D^{(0)} \supset L^{(1)} \supset D^{(1)} \supset \dots \supset L^{(m)} \supset D^{(m)}$$

où  $L^{(i)}$  est la sous-variété linéaire de codimension 3 dans  $L^{(i-1)}$  découpée par les hyperplans de  $\mathbf{P}_{ab-1}$  donnés par la condition d'avoir un point double en  $P_i \in E^2$  (soit 3 hyperplans indépendants) et  $D^{(i)}$  est un sous-ensemble algébrique de  $L^{(i)}$ . Plus précisément, pour  $i \in \{0, \dots, m\}$  le Lemme 2.7 entraîne d'une part (avec  $\ell = 0$  et  $s = 4$ ) qu'il existe une section  $\sigma \in H^0(E^2; \mathcal{L})$  ayant des points doubles à tangentes distinctes en  $P_1, \dots, P_i$  et d'autre part (avec  $\ell = 1$  et  $s = 3$ ) qu'une section générale dans  $\sigma + H^0(E^2; \mathcal{M})$ ,  $\mathcal{M} := \mathcal{L} \otimes \left( \bigcap_{j=1}^i \mathfrak{m}_{X, P_j}^2 \right)$ , n'a pas de singularité en dehors des points  $P_1, \dots, P_i$ . En effet, on ajoute à  $\sigma$  une combinaison linéaire d'autant de sections de  $\mathcal{M}$  que nécessaire qui chacune ne s'annule pas en une singularité de  $\sigma$ , distincte des  $P_1, \dots, P_i$ . De plus, une petite perturbation des coefficients d'ordre 2 conservant les nœuds à tangentes distinctes, les sections générales dans  $\sigma + H^0(E^2; \mathcal{M})$  ont exactement ce type de singularité aux points  $P_1, \dots, P_i$ . Le Corollaire 2.8 montre enfin que le lieu des zéros d'une section générale dans  $\sigma + H^0(E^2; \mathcal{M})$  est un diviseur absolument irréductible de  $E^2$ . On définit  $D^{(i)}$  comme le lieu des  $y \in L^{(i)}$  tel que  $\pi_2^{-1}(y)$  ne soit pas une courbe irréductible ayant comme seules singularités des points doubles à tangentes distinctes en  $P_1, \dots, P_i$ . D'après la discussion précédente,  $D^{(i)}$  est une sous-variété de codimension  $\geq 1$  dans  $L^{(i)}$  (non vide car contenant  $L^{(i+1)}$ ). Ainsi  $\dim(L^{(i)}) = n - 3i$ ,  $\dim(D^{(i)}) \leq n - 3i - 1$  et pour  $y \in L^{(i)} \setminus D^{(i)}$  la fibre  $\pi_2^{-1}(y)$  est une courbe irréductible ayant exactement  $i$  nœuds ordinaires comme seules singularités (en particulier, la fibre est lisse pour  $y \in L^{(0)} \setminus D^{(0)}$ ). De plus, on a clairement  $L^{(i+1)} \subset D^{(i)}$  pour  $i = 0, \dots, m - 1$ .

Il suffit maintenant de prendre pour  $\mathcal{F}^{(i)}$  la restriction de la famille  $\mathcal{F}_{a,b,0}$  au-dessus de l'espace linéaire  $L^{(i)}$ . La famille  $\mathcal{F}^{(i)}$  est non constante car contenant la famille dégénérée  $\mathcal{F}^{(i+1)}$  dans son bord. On remarque que les courbes de la famille  $\mathcal{F}^{(i)}$  ayant exactement  $i$  nœuds comme seules singularités, le genre est, d'après la formule d'adjonction (cf. [Gr-Har, page 471]) égal à

$$g(C_y) = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_{E^2} + C_y) \cdot C_y + 1 - i = \frac{1}{2}C_y \cdot C_y + 1 - i = ab + 1 - i.$$

De même, le degré dans  $\varphi_{\mathcal{L}_0}(E^2)$  se calcule comme précédemment (*confer* page 117). Toutes les affirmations de l'énoncé sont alors vérifiées.  $\square$

On vérifie que les sous-familles  $\mathcal{F}^{(i)}$  du Lemme 4.1 se conforment bien à la Conjecture 1.1

**Théorème 4.2.** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombre  $K_0$  satisfaisant  $\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K_0)) \geq 1$ . Pour tous entiers  $a, b > 9$  satisfaisant  $ab \geq 144$  et  $i = 0, \dots, m$ , où  $m$  est le grand entier  $< \frac{\sqrt{ab}}{2}$ , les familles  $\mathcal{F}^{(i)}$  construites au Lemme 4.1 satisfont pour toute extension finie  $K$  de  $K_0$  et tout  $y \in \mathbf{P}_{ab-3i-1}(K)$  en dehors de  $D^{(i)}$  :*

$$\text{card}(C_y(K)) \leq g(C_y)^{3^{23}(\text{rang}_{\mathbf{Z}}(\text{Jac}(C_y)(K))+1)}.$$

*Démonstration.* On applique la formule (3.2) qui s'écrit

$$\text{card}(C_y(K)) \leq \deg(\varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y))^{60.3^{18}(2\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K))+1)}.$$

On a  $\deg(\varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y)) = 3(a+b)$  et  $g(C_y) = ab + 1 - i$ , d'où  $\deg(\varphi_{\mathcal{L}_0}(C_y)) \leq g(C_y)$ , vu les conditions imposées à  $a$  et  $b$ . De plus, on a déjà montré (confer démonstration du Théorème 3.6)  $\text{rang}_{\mathbf{Z}}(E(K)) \leq \text{rang}_{\mathbf{Z}}(\text{Jac}(C_y)(K))$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 4.3.** L'approche ci-dessus pour construire des familles de courbes de tout genre (assez grand) dans le carré d'une courbe elliptique n'est pas la seule envisageable, ni même peut-être la plus naturelle. La théorie des déformations pourrait fournir une alternative éventuellement plus précise.

## Références

- [Am–Dav] F. AMOROSO et S. DAVID, *Minoration de la hauteur normalisée dans un tore*, J. Inst. Math. Jussieu **2(3)** (2003), 335–381.
- [Ba] T. BAUER, *Seshadri constants on algebraic surfaces*, Math. Ann. **313** (1999), 547–583.
- [Bi–Lan] C. BIRKENHAKKE et H. LANGE, “Complex abelian varieties” (2nd ed.), Grund. Math. Wissen., Vol. 302, Springer Verlag, 2004.
- [Ca–Har–Maz] L. CAPORASO, J. HARRIS et B. MAZUR, *Uniformity of rational points*, J. Amer. Math. Soc., **10** (1997), 1–35.
- [Da–Phi1] S. DAVID et P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes I*, In: “Number Theory, Tiruchirapalli”, India, 3-6 Janvier 1996, V. K. Murty et M. Waldschmidt, éditeurs, Contemp. Math. **210** (1998), 333–364; II, Comment. Math. Helv. **77** (2002), 639–700.

- [Da-Phi2] S. DAVID et P. PHILIPPON. *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), 489–543.
- [Da-Phi3] S. DAVID et P. PHILIPPON. *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des puissances des courbes elliptiques*, tapuscrit, 2005, 74 pages.
- [De] T. DE DIEGO, “Points rationnels sur les familles algébriques de courbes de genre au moins deux”, Thèse, Univ. Paris 7, 1996.
- [Gr-Har] P. GRIFFITH et J. HARRIS, “Principles of algebraic geometry”, Ser. Pure Appl. Math., Wiley Interscience Publ., 1978.
- [Hi-Sil] M. HINDRY et J. SILVERMAN, “Diophantine geometry, an introduction”, Graduate Texts in Math., Vol. 201, Springer Verlag, 2000.
- [La] R. LAZARSFELD, “Positivity in algebraic geometry I”, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3) Vol. 48, Springer Verlag, 2004.
- [Ré1] G. RÉMOND, *Décompte dans une conjecture de Lang*, *Invent. Math.* **142** (2000), 513–545.
- [Ré2] G. RÉMOND, *Borne générique pour le problème de Mordell-Lang*, *Manuscripta Math.* **118** (2005), 85–97.
- [Se] J.-P. SERRE, “Groupes algébriques et corps de classes” *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, Vol. 7, Hermann, Paris, 1959.
- [Si] J. SILVERMAN, “The arithmetic of elliptic curves”, *Grad. Text in Math.*, Vol. 106, Springer Verlag, 1986.
- [Ul] E. ULLMO, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, *Ann. of Math.* **147** (1996), 81–95.
- [Zh] S. ZHANG, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, *Ann. of Math.* **147** (1996), 159–165.