

Françoise PÉCAUT

QUADRILATÈRES ARTICULÉS



Journées nationales APM 1997

Table des matières du chapitre I

| | |
|--|-----------|
| Avant-propos | 1 |
| Introduction au chapitre premier : Quadrilatères articulés | 2 |
| 0. Langage, notations, définitions | 3 |
| 1. Classification suivant le nombre de pivots à révolution complète | 4 |
| 1 - 0. <i>Pivot à révolution complète (en abrégé r.c.)</i> | <i>4</i> |
| 1 - 1 <i>Condition nécessaire et suffisante pour que le pivot A soit à révolution complète</i> | <i>4</i> |
| 1 - 2. <i>Classification des quadrilatères articulés suivant le nombre de pivots à r.c.</i> | <i>5</i> |
| 2. La cubique C attachée à un quadrilatère articulé | 6 |
| 3. Cas de décomposition de la cubique C | 7 |
| 4. Première étude de C dans le cas non décomposé | 8 |
| 4 - 0. <i>Les trois asymptotes</i> | <i>8</i> |
| 4 - 1. <i>La partie de C qui décrit l'ensemble des positions du quadrilatère</i> | <i>8</i> |
| 5. Problème inverse : la cubique C étant donnée, retrouver, s'il y en a, le ou les quadrilatères dont elle décrit les positions | 9 |
| 6. Étude de la courbe qui représente le quadrilatère | 10 |
| 6 - 0. <i>Cas du quadrilatère elliptique</i> | <i>10</i> |
| 6 - 1. <i>Cas du quadrilatère unicursal</i> | <i>11</i> |
| 6 - 2. <i>Majoration de la somme des carrés des longueurs des diagonales</i> | <i>12</i> |
| 7. Représentation paramétrique rationnelle de C dans le cas unicursal | 12 |
| 7 - 0. <i>Les équations paramétriques de C</i> | <i>12</i> |
| 7 - 1. <i>Interprétation géométrique de la condition d'unicursalité</i> | <i>13</i> |
| 8. Connexité de l'ensemble des positions d'un quadrilatère articulé | 14 |
| 8 - 0. <i>Transformation d'un mouvement sur un cercle en un mouvement sur un autre cercle</i> | <i>14</i> |
| 8 - 1. <i>L'ensemble Π des positions du quadrilatère et la courbe Γ associée</i> | <i>15</i> |
| 8 - 2. <i>Les composantes connexes de l'ensemble des positions</i> | <i>15</i> |
| 9. Le théorème de Darboux | 16 |
| 9 - 0. <i>La suite des quadrilatères de Darboux</i> | <i>16</i> |
| 9 - 1. <i>Le grand Théorème de Poncelet pour les cercles</i> | <i>16</i> |
| 9 - 2. <i>Condition nécessaire et suffisante pour que la suite (Q_n) présente quatre formes distinctes</i> | <i>17</i> |
| 9 - 3. <i>Condition nécessaire et suffisante pour que la suite (Q_n) présente six formes distinctes</i> | <i>18</i> |
| 9 - 4. <i>Convergence de la suite de Darboux</i> | <i>19</i> |
| 10. Quadrilatère articulé dans l'espace affine euclidien à trois dimensions E^3 | 20 |
| 10 - 0. <i>Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un pivot à révolution complète .</i> | <i>20</i> |
| 10 - 1. <i>Le domaine Δ qui décrit l'ensemble des positions d'un quadrilatère articulé de E^3</i> | <i>20</i> |
| 10 - 2. <i>Connexité de l'ensemble des positions d'un quadrilatère articulé</i> | <i>21</i> |
| 10 - 3. <i>Axe d'un quadrilatère gauche dont une position plane est un quadrilatère unicursal</i> | <i>21</i> |
| 10 - 4. <i>Cas du rhomboïde et du paralléloïde : les deux axes d'une position</i> | <i>23</i> |
| Conclusion | 23 |
| Bibliographie | 24 |

Quadrilatères articulés et octaèdres de Bricard

Par Françoise Pécaut, professeur de mathématiques honoraire à l'Université d'Avignon

Avant- propos

Les systèmes articulés ont fait l'objet de multiples recherches dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle. L'intérêt suscité n'était pas seulement technique, les résultats faisaient aussi avancer la cinématique et la géométrie. Ainsi **Kempe** démontre que toute courbe algébrique plane peut être décrite par un système articulé, au moins localement. Dans ses "Leçons de cinématique" **Koenigs (2)** p. 243 date la théorie des systèmes articulés de la découverte par **Peaucellier** de son célèbre inverseur en 1864. Il ajoute qu'on avait "sans doute utilisé des barres articulées bien avant cette époque" ; il rend justice, p. 262, au père **Scheiner**, jésuite allemand qui construisit en 1603 le premier pantographe pour reproduction de dessins diminués ou agrandis. Les noms des grands géomètres anglais qui s'intéressèrent dans les années 1880 aux systèmes articulés sont **Sylvester, Hart, Clifford, Roberts, Cayley, Kempe**. L'ouvrage de référence sur les systèmes articulés est toujours **Koenigs (2)** puisque **D. Leborgne (8)**, estimant qu'ils constituent "une source permanente d'inspiration pour l'enseignement de la géométrie à tous les niveaux" fait, pour le colloque IREM (Nantes, Mai 1979) un digest du chapitre que **Koenigs** leur consacre. **Leborgne** était motivé par la récente découverte par **Connelly** à l'IHES en 1975 d'un polyèdre à faces rigides pleines déformable. Les trois ou quatre polyèdres flexibles construits dans le sillage de **Connelly** (le plus simple a 9 sommets) utilisent tous des octaèdres de **Bricard (3)**, c'est à dire des systèmes non rigides de douze barres articulées par quatre en chacun des six sommets. **Raoul Bricard** publie en 1897 son "Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé". Il démontre qu'il en existe trois types, et que ce sont les seuls possibles. Par la suite on trouve un article de **G.T. Bennett (4)** en 1912, et surtout une élégante étude géométrique par **H. Lebesgue (5)** dans un cours sur les polyèdres professé au Collège de France en 1938-1939. **Bricard** a le grand mérite d'aboutir, mais sa démarche est difficile à suivre, ses outils démodés. L'exposé de **Lebesgue** est beaucoup plus brillant, mais il est incomplet et décourage les étudiants actuels qui manquent de virtuosité dans le maniement des isométries de l'espace euclidien à trois dimensions. Les trois types d'octaèdres de **Bricard** peuvent être ainsi décrits : deux sont symétriques : l'un est conservé par un demi-tour, l'autre par un miroir. Le troisième, le plus général, "doit être considéré comme le plus intéressant" de l'avis même de son inventeur **(3)** p.147 "car la déformabilité des octaèdres de ce type est loin d'être aussi intuitive que celle des premiers". Il est constitué de trois quadrilatères articulés de type "unicursal" (dénomination de **Darboux (1)**), ayant deux sommets communs deux à deux. J'espère, dans cet avant-propos, avoir convaincu le lecteur potentiel que quadrilatères articulés, octaèdres de **Bricard** et polyèdres flexibles sont des objets qu'il faut étudier ensemble, et qu'il n'est pas sans intérêt de tenter d'en rendre la lecture facilement accessible puisque c'est possible.

Chapitre I

Quadrilatères articulés

Introduction

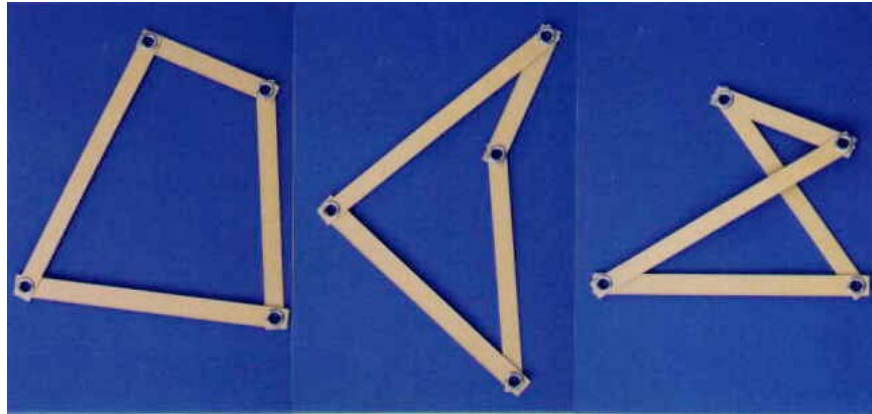
Le quadrilatère articulé est le plus simple des systèmes articulés. C'est un "trois barres", deux manivelles et une bielle, si on décide de fixer deux sommets (cf. Koenigs (2) p. 256). Cette image mécanique évoque les cas particuliers les plus fréquemment utilisés : le parallélogramme, et aussi le rhomboïde ont deux couples de côtés de longueur égale ; en géométrie élémentaire les exemples les plus connus sont respectivement le translateur de Kempe et l'inverseur de Peaucellier. Mais le mathématicien souhaite étudier le quadrilatère "quelconque" et faire des classifications. Nous étudions d'abord, en suivant Koenigs, le nombre de pivots à révolution complète : dans quelles conditions une barre peut-elle faire un tour complet autour d'un sommet ? Ensuite nous écrivons la relation qui lie les longueurs des deux diagonales d'un quadrilatère dont les longueurs des côtés sont données. Cette relation permet d'attacher à tout quadrilatère plan une cubique plane. Les cas particuliers indiqués ci-dessus sont les cas de décomposition de la cubique en une droite et une hyperbole ; le cas unicursal, qui apparaît comme transitoire dans l'étude du nombre de pivots à révolution complète, se traduit par la possibilité de paramétrer rationnellement les lignes trigonométriques des angles du quadrilatère, qui est dans ce cas circonscriptible à un cercle. Le rôle fondamental que joue le quadrilatère unicursal dans la construction de l'octaèdre le plus général de Bricard m'a motivée pour l'étude des quadrilatères articulés. Un quadrilatère articulé peut-il se retourner sans quitter son plan ? La réponse se trouve dans l'étude de la connexité de l'ensemble des positions, facilitée par la considération de la courbe simple fermée, portion utile de la cubique attachée au quadrilatère. Enfin cette courbe permet d'illustrer un théorème que Darboux (1) a obtenu en paramétrant les lignes trigonométriques des angles d'un quadrilatère articulé à l'aide de fonctions elliptiques. Ce théorème concerne la suite de quadrilatères ayant deux à deux une diagonale commune et les mêmes longueurs de côtés se succédant dans le même ordre, construits par symétrisation d'un sommet par rapport à une diagonale. A côté du classique quadrilatère à diagonales rectangulaires on trouve celui dont les couples de côtés opposés ont la même moyenne géométrique. Pour terminer, je montre que le quadrilatère articulé dans l'espace affine euclidien à trois dimensions est représenté par l'ensemble des points intérieurs à la portion de cubique définie ci-dessus, et que les questions qu'on peut se poser vis à vis du quadrilatère articulé dans l'espace à trois dimensions trouvent naturellement leur réponse dans l'étude à deux dimensions.

D'autres chapitres sont en préparation : utilisation de l'aire définie par un quadrilatère plan articulé pour paramétrer l'ensemble de ses positions. Une loi de groupe sur l'ensemble des positions d'un quadrilatère articulé via une présentation élémentaire des fonctions elliptiques.

On se place dans le plan affine euclidien orienté E^2 jusqu'au § 9 inclus.

0. Langage, notations, définitions

Un quadrilatère articulé est l'ensemble de quatre barres, ou tiges, rigides, ayant deux à deux une extrémité commune, autour de laquelle elles peuvent tourner indépendamment. Pour réaliser concrètement un tel système, on peut prendre des bandes étroites de carton fort pour les barres et poser des œillets pour les articulations (voir photos ci dessous).



En langage géométrique, la figure a quatre côtés, qui sont des segments de longueur constante, et quatre sommets, appelés aussi pivots (pour rappeler l'articulation). Chaque côté (resp. sommet) a un côté (resp. sommet) opposé. Il y a deux paires de côtés opposés et deux paires de sommets opposés. Un segment joignant deux sommets opposés est une diagonale. Il y a deux diagonales, non matérialisées, de longueurs variables. Les angles du quadrilatère articulé sont également variables. Par définition, l'angle d'un quadrilatère en un sommet est l'angle du triangle défini par ce sommet et la diagonale qui ne contient pas ce sommet. Les mesures des angles en radians sont comprises entre 0 et π . Un quadrilatère articulé plan peut être *convexe* (somme des angles = 2π), *uniconcave* (un angle = somme des trois autres), *croisé* (il existe une paire d'angles consécutifs dont la somme est égale à celle de l'autre paire). On pourra se convaincre par la suite que, sauf cas particulier, un même quadrilatère articulé peut prendre les trois formes convexe, uniconcave, croisée, comme sur les photos. L'objet ci-dessus décrit peut être défini intrinsèquement par la succession de quatre nombres strictement positifs a, b, c, d , qui sont les longueurs des quatre barres. Une condition nécessaire et suffisante d'existence, supposée réalisée par la suite, est l'inégalité triangulaire : "plus grande longueur strictement inférieure à la somme des trois autres". Strictement, car dans le cas de l'égalité, le quadrilatère est aplati sur son plus grand côté : sans intérêt puisqu'aucune articulation ne peut bouger. Il faut remarquer que (a, b, c, d) , (b, c, d, a) , (c, d, a, b) , (d, a, b, c) et aussi (a, d, c, b) , (d, c, b, a) , (c, b, a, d) , (b, a, d, c) définissent le même quadrilatère articulé $Q(a, b, c, d)$. A et B étant deux points de E^2 , le segment $[AB]$ et sa longueur sont notés AB . Par abus de langage on dit "le côté a ".

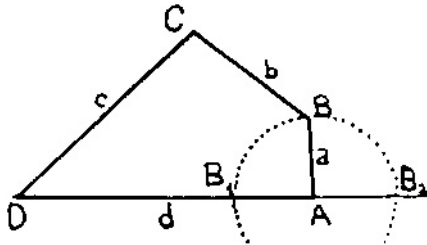
Définition : Soient quatre points A, B, C, D du plan E^2 tels que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. On appelle **position** (resp. **forme**) de $Q(a, b, c, d)$ une classe d'équivalence pour la relation :

Q adrilatère $ABCD \sim Q$ adrilatère $A'B'C'D' \iff$ Il existe un **déplacement** (resp. **isométrie**) de E^2 qui envoie les quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ sur les quatre côtés du quadrilatère $A'B'C'D'$.

Un quadrilatère articulé, fabriqué évidemment dans E^3 , avec des œillets bien serrés pour que les angles ne varient que si on les y oblige, a une "forme" qui correspond à deux "positions" dans E^2 suivant qu'on le pose à l'endroit ou à l'envers sur un plan. Une fois qu'on l'a posé, on peut le faire glisser n'importe comment sur le plan sans faire bouger les articulations : il garde la même position.

1. Classification suivant le nombre de pivots à révolution complète

1-0. *Pivot à révolution complète (en abrégé r.c.)*



Soit $Q(A, B, C, D)$ un représentant dans E^2 d'une position de $Q(a, b, c, d)$. A est le sommet commun aux côtés a et d . On baptise les sommets de façon que $d \geq a$ et on fixe les pivots D et A . L'ensemble des positions de $Q(a, b, c, d)$ s'identifie à :

$$\{(B, C) \in E^2 \times E^2 / AB = a, BC = b, CD = d\}.$$

Quand (B, C) décrit cet ensemble, B décrit tout ou partie du cercle de centre A et de rayon a .

Définition : Soit A un pivot d'un quadrilatère articulé dans le plan. Supposons fixe la plus longue des deux barres d'extrémité A . On dit que le pivot A est à **révolution complète** si l'autre barre d'extrémité A peut faire un tour complet autour de A .

1-1. *Conditions nécessaires et suffisantes pour que le pivot A soit à révolution complète*

1) Conditions nécessaires.

Par hypothèse B décrit le cercle de centre A et de rayon a en entier. Démontrons :

* a est plus petit que tous les autres côtés

B peut venir sur la droite AD , en B_1 entre D et A , ou en B_2 à l'extérieur du segment AD . L'existence, dans l'un et l'autre cas, du triangle DBC , se traduit par les inégalités :

$$(1) \quad |c - b| \leq d - a \quad , \quad (2) \quad a + d \leq b + c.$$

Si $b \leq c$, $|c - b| = c - b$. On réécrit (1) :

$$(1) \quad a - b \leq d - c \quad , \quad (2) \quad a - b \leq c - d;$$

(1) et (2) impliquent $a - b \leq 0$, donc $a \leq b \leq c$. Si $c \leq b$, $|c - b| = b - c$ et (1) s'écrit :

$$(1) \quad a - c \leq d - b \quad , \quad (2) \quad a - c \leq b - d;$$

(1) et (2) impliquent $a \leq c \leq b$. Et comme on a déjà $a \leq d$, a est plus petit que les trois autres côtés.

** *La somme d'un plus petit et d'un plus grand côté est inférieure ou égale à la somme des deux autres*
On sait que a est un plus petit côté. Si c est plus grand côté, (1) s'écrit $a + c \leq b + d$. Si b est plus grand côté, (1) s'écrit $a + b \leq c + d$. Si d est plus grand côté, (2) donne le résultat sous sa forme initiale $a + d \leq b + c$.

2) Les conditions * et ** sont suffisantes. Supposons les remplies. En ajoutant a , plus petit côté, à l'une quelconque des trois autres longueurs, on obtient une somme inférieure à la somme des deux autres :

$$(3) \quad a + b \leq c + d \quad , \quad (4) \quad a + c \leq b + d \quad , \quad (5) \quad a + d \leq b + c;$$

(3) et (4) équivalent à (1) : $|b - c| \leq d - a$. Prenons B arbitraire sur le cercle de centre A , de rayon a . Joignons BD ; dans le triangle BAD , le côté BD est compris entre la somme et la différence des deux autres :

$$d - a \leq BD \leq d + a$$

grâce à (1) et (5) on peut minorer $d - a$ et majorer $d + a$; on obtient $|c - b| \leq BD \leq b + c$, qui prouve l'existence du point C quel soit l'angle BAD . Il est ainsi démontré que le pivot A est à r. c.

Théorème : a, b, c, d sont les longueurs des côtés d'un quadrilatère articulé ; on pose : $E = \inf(a, b, c, d) + \sup(a, b, c, d)$, somme des longueurs d'un plus petit côté et d'un plus grand côté (extrêmes), et $M =$ somme des longueurs des deux autres côtés (moyens). Pour qu'un quadrilatère articulé ait un pivot à révolution complète, il faut et il suffit que $E \leq M$. Cette condition étant remplie, le quadrilatère a au moins deux pivots à révolution complète qui sont les extrémités d'un côté de longueur minimum.

Conséquences :

1) Le théorème précédent invite à privilégier un côté de plus petite longueur, nommé a , mis en première place. Les deux côtés adjacents au côté a sont b et d : on nomme b celui de plus petite longueur. Ainsi, dans toute la suite, la notation $Q(a,b,c,d)$ pour un quadrilatère articulé suppose

$$a = \inf(a,b,c,d) \quad \text{et} \quad b \leq d.$$

2) On note x la diagonale qui joint le sommet commun aux côtés a et b et le sommet commun aux côtés c et d ; on note y la diagonale qui joint le sommet commun aux côtés a et d et le sommet commun aux côtés c et b . Introduisons les quatre intervalles :

$$I_A = [d - a, d + a] \quad , \quad I_C = [|c - b|, b + c] \quad , \quad I_B = [b - a, b + a] \quad , \quad I_D = [|d - c|, c + d].$$

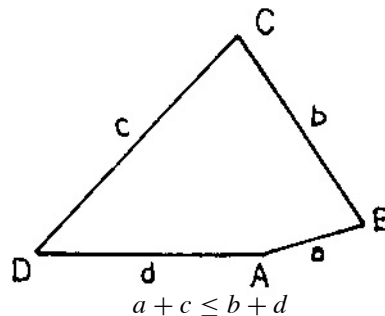
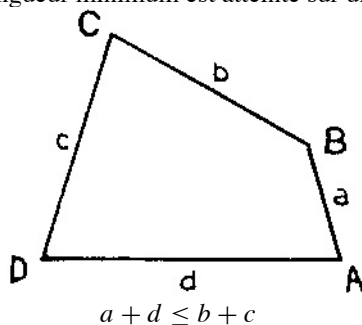
L'existence de $Q(a,b,c,d)$ s'écrit $I_A \cap I_C \neq \emptyset$ ou, de manière équivalente $I_B \cap I_D \neq \emptyset$. Le théorème précédent permet de préciser :

$$A \text{ pivot à révolution complète} \iff I_A \subset I_C \iff I_B \subset I_D.$$

1-2. Classification des quadrilatères articulés suivant le nombre de pivots à révolution complète

Cas $E \leq M$

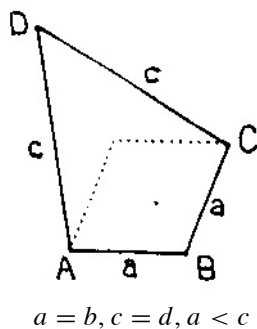
1) La longueur minimum est atteinte sur une seule tige, celle de longueur a : **2 pivots à r. c.**



Le plus grand côté peut être adjacent ou opposé au plus petit ; deux des trois côtés b, c, d , peuvent être égaux, ou même tous les trois.

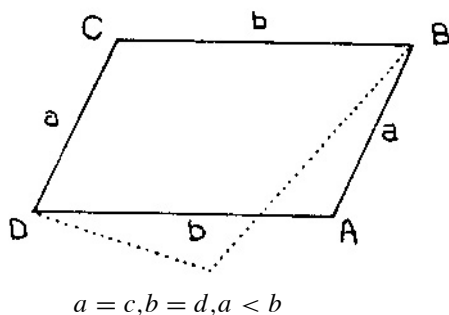
2) Longueur minimum atteinte sur deux tiges ; alors les deux autres tiges sont de longueur égale.

* Les deux tiges de longueur minimum sont adjacentes :



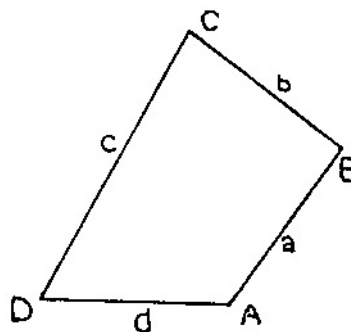
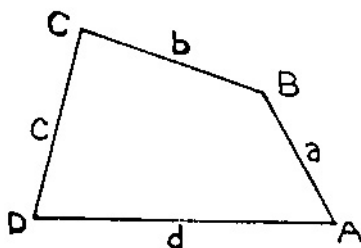
$Q(a,a,c,c)$ s'appelle rhomboïde, cerf-volant dans sa forme convexe, fer de lance dans sa forme non convexe, d'après Koenigs (2). Nous préférons bi-isocèle d'après Darboux (1). **3 pivots à r. c.**

* Les deux tiges de longueur minimum sont opposées :



$Q(a,b,a,b)$ est un parallélogramme ; dans une position non convexe, il est dit contre-parallélogramme, ou parallélogramme croisé. **4 pivots à r. c.** Le losange $Q(a,a,a,a)$, ayant quatre pivots à r. c., doit être considéré comme un parallélogramme.

Cas $E > M$



Il n'y a pas de pivot à révolution complète. Deux côtés peuvent être égaux, on peut même avoir trois côtés égaux, le quatrième étant le plus grand. **0 pivot à r. c.**

2. La cubique C attachée à un quadrilatère articulé

Il y a zéro, deux ou quatre positions de $Q(a, b, c, d)$ deux à deux symétriques admettant x comme longueur d'une diagonale, donc zéro, une ou deux valeurs pour la longueur y de l'autre diagonale. On peut donc prévoir qu'il existe une relation (algébrique) liant x et y , du second degré par rapport à chacune des variables. Dans ce paragraphe nous exhibons cette relation.

Dans un espace vectoriel de dimension 2, trois vecteurs sont dépendants ; leur déterminant est nul. Appliquons aux trois vecteurs \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} , définis par une position du quadrilatère articulé $ABCD$:

$$\det(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = 0.$$

Considérons la matrice M des colonnes des composantes des trois vecteurs dans une base orthonormée. Multiplions à gauche par la matrice transposée \tilde{M} :

$$\det(\tilde{M}M) = (\det M)^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{DA}^2 & \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} & \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} & \overrightarrow{DB}^2 & \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} & \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} & \overrightarrow{DC}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant s'appelle le déterminant de Gram (cf. Berger (7), 2, p. 63) des vecteurs \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} . Chaque produit scalaire peut s'exprimer en fonction des normes des vecteurs par la formule :

$$2(u \cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

En accord avec les notations pour les diagonales introduites en 1-1 2), $BD = x$, $AC = y$. La relation cherchée est :

$$\begin{vmatrix} 2d^2 & d^2 + x^2 - a^2 & d^2 + c^2 - y^2 \\ x^2 + d^2 - a^2 & 2x^2 & x^2 + c^2 - b^2 \\ c^2 + d^2 - y^2 & c^2 + x^2 - b^2 & 2c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Après calcul, on trouve :

$$-x^2y^2(x^2 + y^2) + \alpha x^2y^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + \delta = 0$$

où les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & \beta &= (d^2 - a^2)(b^2 - c^2) \\ \gamma &= (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) & \delta &= (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)(a^2c^2 - b^2d^2) \end{aligned}$$

Posons $x^2 = X$, et $y^2 = Y$. La relation entre les carrés des longueurs des diagonales est :

$$(1) \quad -XY(X + Y) + \alpha XY + \beta Y + \gamma X + \delta = 0.$$

C'est l'équation d'une cubique C . Si un point (X, Y) de cette courbe représente un quadrilatère plan articulé, il n'en détermine qu'un, à isométrie près. En effet les six distances mutuelles de quatre points étant données, s'il existe un quadrilatère ayant pour sommets ces quatre points, il n'en existe qu'un à isométrie près (cf. Berger (7), 2, p. 108).

On vérifie sur les formules ci-dessus que l'échange de b et d équivaut à l'échange de β et γ , donc à l'échange de la courbe C avec la courbe symétrique par rapport à la première bissectrice des axes de coordonnées. Dans le cas $\beta = \gamma$, équivalent à $d = b$ ou $a = c$, la courbe C admet pour axe de symétrie la première bissectrice.

3. Cas de décomposition de la cubique C

C peut se décomposer en une droite et une hyperbole ou en trois droites.

* La droite a la direction $X + Y = 0$

Si C se décompose en une droite $X + Y = u$ et une hyperbole, il existe des coefficients u, v, r, s , tels que l'équation (1) s'identifie à :

$$(X + Y - u)(-XY + vY + rX + s) = 0.$$

Pour cela, il faut et il suffit que $\beta = \gamma$ et $\alpha\beta + \delta = \alpha\gamma + \delta = 0$; alors la cubique C se décompose en :

$$X + Y = \alpha \quad \text{et} \quad XY = \beta.$$

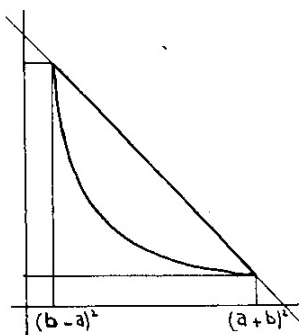
Reprenons les expressions des coefficients en fonction des longueurs des côtés. Après calculs :

$$\beta - \gamma = (a^2 - c^2)(d^2 - b^2) \quad , \quad \alpha\beta + \delta = (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)(a^2b^2 - c^2d^2).$$

Les conditions pour la décomposition sont ($a = c$ ou $b = d$) et $(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)(a^2b^2 - c^2d^2) = 0$, soit :

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d.$$

Pour que la cubique C se décompose en une droite de direction $X + Y = 0$ et une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme, convexe ou croisé ; a et b étant les longueurs des côtés du parallélogramme, les équations de C sont :



$$(1) \quad X + Y = 2(a^2 + b^2) \quad (2) \quad XY = (a^2 - b^2)^2.$$

Dans un parallélogramme convexe articulé, la somme des carrés des diagonales est constante ; dans un parallélogramme croisé articulé, le produit des diagonales est constant.

X étant compris entre $(a - b)^2$ et $(a + b)^2$, l'ensemble des points (X, Y) représentant le quadrilatère est un circuit simple, réunion d'un arc d'hyperbole et d'un segment de droite. Les deux points anguleux correspondent aux deux positions "alignées" du quadrilatère.

* La droite a la direction $Y = 0$

Comme précédemment, il existe des coefficients u, v, r, s , tels que l'équation (1) s'identifie à :

$$(Y - u)(-XY - X^2 + vY + rX + s) = 0.$$

Pour que ces coefficients existent, il faut et il suffit que $\delta = \gamma = 0$; alors la cubique C se décompose en

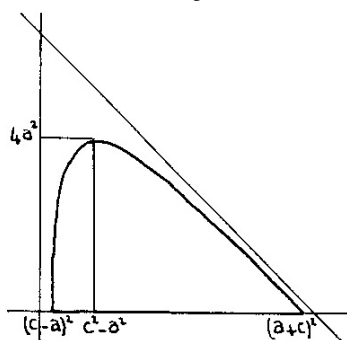
$$Y = 0 \quad , \quad X(X + Y) - aX - b = 0.$$

Réintroduisons les longueurs des côtés ; les conditions pour cette décomposition sont :

$$(a = b \text{ ou } c = d) \quad \text{et} \quad (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)(a^2c^2 - b^2d^2) = 0.$$

Elles se réduisent à : $a = b$ et $c = d$.

Pour que la cubique C se décompose en une droite de direction $Y = 0$ d'une part, et en une hyperbole dont les asymptotes ont les directions $X = 0$ et $X + Y = 0$ d'autre part, il faut et il suffit que le quadrilatère $ABCD$ soit bi-isocèle, cerf-volant ou fer de lance ; a et c , $a < c$, étant les longueurs des côtés, C est décomposée en :



$$(1) \quad Y = 0 \quad (2) \quad X[X + Y - 2(a^2 + c^2)] + (a^2 - c^2)^2 = 0.$$

On trouve encore un circuit. Quand le quadrilatère bi-isocèle est "aligné", il se comporte comme un système articulé à deux tiges et un seul pivot ; l'ensemble des positions de ce système à deux tiges est représenté sur l'axe des X par le segment $[(c - a)^2, (c + a)^2]$. L'arc $X < c^2 - a^2$ représente les positions fer de lance, l'autre arc représente les positions cerf-volant.

* C se décompose en trois droites, $X = 0$, $Y = 0$, $X + Y = 4a^2$. Le quadrilatère articulé est un losange. Le circuit représentatif est constitué des trois côtés du triangle rectangle isocèle formé par les trois droites. Dans la classification du paragraphe 1 (par le nombre de pivots à révolution complète), le losange figurait comme cas particulier du parallélogramme, avec quatre pivots.

4. Première étude de C dans le cas non décomposé

Dans ce paragraphe, C est la cubique *propre* d'équation :

$$(1) \quad -XY(X + Y - \alpha) + \beta Y + \gamma X + \delta = 0,$$

c'est dire que, suivant les résultats du paragraphe précédent, $\beta - \gamma$ et $\alpha\beta + \delta$ sont non tous deux nuls, δ et γ non tous deux nuls (et, par symétrie, δ et β non tous deux nuls).

4 - 0. Les trois asymptotes

Sur la forme même de l'équation (1), on constate l'existence de trois asymptotes :

- * une asymptote d'équation $X = 0$, qui recoupe C au point d'ordonnée $-\delta/\beta$,
- * une asymptote d'équation $Y = 0$, qui recoupe C au point d'abscisse $-\delta/\gamma$,
- * une asymptote d'équation $X + Y = \alpha$, qui recoupe C au point de coordonnées :

$$X = \frac{\alpha\beta + \delta}{\beta - \gamma}, \quad Y = \frac{\alpha\gamma + \delta}{\gamma - \beta}.$$

Dans l'équation (1) figurent quatre formes linéaires. Une manière agréable de construire la courbe C consiste à tracer les quatre droites correspondantes et à procéder par régionnement : les points de C se trouvent dans les régions où $XY(X + Y - \alpha)(\beta Y + \gamma X + \delta) > 0$.

4 - 1. La partie de C qui décrit l'ensemble des positions du quadrilatère

L'équation (1) peut être considérée comme étant du second degré à l'inconnue Y :

$$(1') \quad -XY^2 + (-X^2 + \alpha X + \beta)Y + \gamma X + \delta = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta(X) = (-X^2 + \alpha X + \beta)^2 + 4X(\gamma X + \delta)$. Le polynôme du 4ème degré $\Delta(X)$ a quatre racines positives : nous allons les déterminer.

Prenons un cas où d est plus grand côté, et $a + d > b + c$. Comme $b + c > d - a$, il existe un point B sur le cercle de centre A et de rayon a (pivots D et A fixés) tel que $DB^2 = X = (b + c)^2$. C est alors le seul point commun aux cercles de centre B (resp. D) et de rayon b (resp. c). Pour $X = (b + c)^2$, il existe donc une seule valeur de Y solution de (1'). Cette valeur est double. Il en résulte que

$$\Delta((b + c)^2) = 0.$$

Bien qu'il n'existe pas de point B sur le cercle de centre A et de rayon a tel que $DB^2 = X = (b - c)^2$, de beaux raisonnements utilisant les imaginaires montrent que $\Delta((b - c)^2) = 0$. En partant du triangle DCB et en cherchant à construire A , on trouve que $(d - a)^2$ et $(d + a)^2$ sont aussi racines de Δ . Il arrive que "le plus court chemin entre deux résultats réels passe par les complexes" (Hadamard, suivant Berger (7), vol.1 p. 175). Pour simplifier, je propose au lecteur de vérifier tout simplement que :

$$\Delta(X) = [X - (d - a)^2][X - (a + d)^2][X - (b - c)^2][X - (b + c)^2].$$

Les valeurs de Y correspondant aux racines de Δ sont

$$Y = \frac{-X^2 + \alpha X + \beta}{2X} \iff X(X + 2Y - \alpha) = \beta,$$

équation qui représente une hyperbole, notée dans la suite (H_1), courbe diamétrale de C relativement à la direction de l'axe des Y .

En échangeant les rôles de X et Y on voit de même que $(b - a)^2$, $(a + b)^2$, $(d - c)^2$, $(c + d)^2$ sont les ordonnées de tangentes à C parallèles à l'axe des X , et que les points de contact de ces tangentes sont sur l'hyperbole (H_2), lieu des milieux des cordes parallèles à l'axe des X , dont une équation est :

$$Y(Y + 2X - \alpha) = \gamma.$$

Les quatre parallèles à l'axe des X et les quatre parallèles à l'axe des Y ainsi définies partitionnent le plan en rectangles. La portion de la courbe C qui représente l'ensemble des positions du quadrilatère $ABCD$ est contenue dans l'un de ces rectangles que nous allons préciser.

Sur l'axe des X , les intervalles $[(d-a)^2, (d+a)^2]$ et $[(b-c)^2, (b+c)^2]$ doivent avoir une partie commune. Alors ou bien l'un est contenu dans l'autre (on sait que cela signifie que A et B sont pivots à r.c.), ou bien chacun rencontre le complémentaire de l'autre (il n'y a pas de pivot à r.c.). Dans ce dernier cas nous disons que les deux intervalles sont enchevêtrés, il y a deux cas d'enchevêtrement.

On arrive aux conclusions suivantes :

Premier cas : deux pivots r. c.

$$\begin{aligned} (b-c)^2 \leq (d-a)^2 < (a+d)^2 \leq (b+c)^2 & \quad c \text{ est plus grand côté : } a+c \leq b+d \\ (d-c)^2 \leq (b-a)^2 < (a+b)^2 \leq (c+d)^2 & \quad \text{ou } d \text{ est plus grand côté : } a+d \leq b+c \end{aligned}$$

Deuxième cas : pas de pivot r. c.

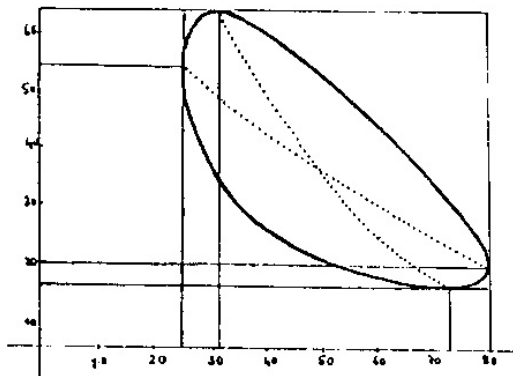
$$\begin{aligned} (d-a)^2 < (b-c)^2 < (a+d)^2 < (b+c)^2 & \quad c \text{ est plus grand côté : } a+c > b+d \\ (b-a)^2 < (c-d)^2 < (a+b)^2 < (c+d)^2 & \end{aligned}$$

Troisième cas : pas de pivot à r. c.

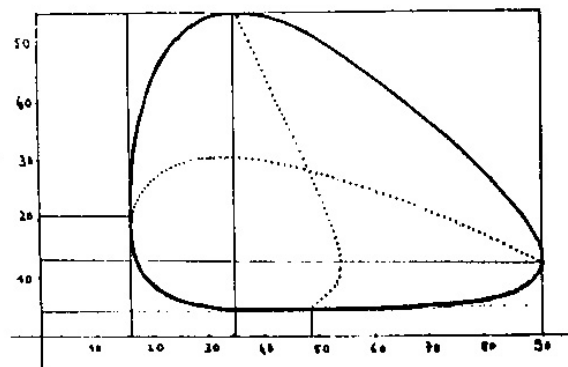
$$\begin{aligned} (b-c)^2 < (d-a)^2 < (b+c)^2 < (a+d)^2 & \quad c \text{ est plus grand côté : } a+d > b+c \\ (b-a)^2 < (c-d)^2 < (a+b)^2 < (c+d)^2 & \end{aligned}$$

La partie de la courbe C qui décrit l'ensemble des positions du quadrilatère à isométrie près est contenue dans le rectangle défini par les quatre nombres "moyens" dans la colonne de gauche.

Dans la suite, on désigne par Γ la partie de la courbe C ensemble des points (X, Y) où X et Y sont les carrés des longueurs des deux diagonales pour une position du quadrilatère articulé $Q(a, b, c, d)$.



$$\begin{aligned} \text{Troisième cas : } a+d > b+c \\ a=3, c=4, b=5, d=8 \\ 25 \leq X \leq 81; 16 \leq Y \leq 64 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Deuxième cas : } a+c > b+d \\ a=3.5, b=4, d=6, c=8 \\ 16 \leq X \leq 90.25; 4 \leq Y \leq 56.25 \end{aligned}$$

5. Problème inverse : la cubique C étant donnée, retrouver, s'il y en a, le ou les quadrilatères dont elle décrit les positions

Existence. Pour que

$$(1) \quad -XY(X+Y) + \alpha XY + \beta Y + \gamma X + \delta = 0$$

soit la relation entre les carrés des longueurs des diagonales d'un quadrilatère plan, il faut que le polynôme $\Delta(X)$, discriminant de l'équation (1) considérée comme du second degré à l'inconnue Y ait quatre racines réelles positives, les deux "moyennes" étant distinctes :

$$(2) \quad \Delta(X) = X^4 - 2\alpha X^3 + (\alpha^2 - 2\beta + 4\gamma)X^2 + 2(\alpha\beta + 2\delta)X + \beta^2.$$

(A cause des relations entre les coefficients et les racines, il faut $\alpha > 0$; $\alpha^2 - 2\beta + 4\gamma > 0$; $\alpha\beta + 2\delta < 0$; mais ces conditions ne suffisent pas.)

Nombre de solutions. Lorsque le polynôme (2) a quatre racines positives, soient

$$(3) \quad x_1^2 \leq x_2^2 < x_3^2 \leq x_4^2 \quad , \quad x_i \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

les racines rangées dans l'ordre naturel. Pour retrouver un quadrilatère à r. c., par exemple celui dont un plus grand côté est opposé au plus petit ($a < b \leq d \leq c$), il faut identifier (cf. Premier cas, § 4-1) :

$$\begin{aligned} c - b = x_1 \quad ; \quad d - a = x_2 \quad ; \quad a + d = x_3 \quad ; \quad b + c = x_4 \\ \Downarrow \\ 2a = x_3 - x_2 \quad ; \quad 2b = x_4 - x_1 \quad ; \quad 2c = x_4 + x_1 \quad ; \quad 2d = x_3 + x_2. \end{aligned}$$

Vérifions que nous pouvons être dans le cas prévu $a < b \leq d \leq c$:

$$x_3 - x_2 < x_4 - x_1 \leq x_3 + x_2 \leq x_4 + x_1.$$

La première inégalité résulte de (3). la seconde exige que le plus grand des x_i soit inférieur à la somme des trois autres. La troisième est aussi une condition que doivent vérifier les racines de (2). Sans entrer dans le détail, énonçons les résultats :

Une cubique $XY(X + Y) + \alpha XY + \beta Y + \gamma X + \delta = 0$ donnée de manière que le discriminant de l'équation du second degré qu'elle définit ait quatre racines positives (3) et que le plus grand des x_i soit inférieur à la somme des trois autres, définit deux quadrilatères articulés, l'un ayant deux pivots à révolution complète, l'autre n'ayant pas de pivot à révolution complète. De plus :

si $x_3 + x_2 < x_4 + x_1$ le côté opposé au plus petit côté est le plus grand côté,

si $x_3 + x_2 > x_4 + x_1$ le côté adjacent au plus petit côté est le plus grand côté,

si $x_3 + x_2 = x_4 + x_1$ il y a deux plus grands côtés au moins dans le cas de deux pivots à r. c., deux plus petits côtés au moins dans le cas sans pivots à r. c..

6. Étude de la courbe qui représente le quadrilatère

6 - 0. Cas du quadrilatère elliptique

On appelle elliptique un quadrilatère pour lequel $\Delta(X)$, (cf. ci-dessus §5, équation (2)) a quatre racines distinctes positives (cf. Darboux (1)). C peut être paramétrée par des fonctions elliptiques. Nous allons montrer que Γ est une courbe simple fermée de classe C^1 , tout entière placée d'un même côté par rapport à chacune de ses tangentes, contenue dans le triangle défini par les trois droites :

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad X + Y = \alpha.$$

* Γ est la réunion des graphes des fonctions Y_1 et Y_2 définies dans l'intervalle $[x_2^2, x_3^2]$ par :

$$Y_1(X) = -\frac{X}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2X} + \frac{\sqrt{\Delta(X)}}{2X} \quad , \quad Y_2(X) = -\frac{X}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2X} - \frac{\sqrt{\Delta(X)}}{2X}.$$

Y_1 et Y_2 sont dérivables et à dérivée continue dans $]x_2^2, x_3^2[$. Les graphes se raccordent aux extrémités de l'intervalle avec une tangente parallèle à l'axe des Y pour former une courbe simple fermée Γ . Il y a en tout point une tangente variant continûment avec le point.

Les deux arcs ouverts au dessus de $]x_2^2, x_3^2[$ des hyperboles diamétrales sont intérieurs à Γ ,

$$(H_1) \quad X(X + 2Y - \alpha) = \beta \quad , \quad (H_2) \quad Y(Y + 2X - \alpha) = \gamma,$$

ils se coupent en un seul point Ω intérieur à Γ . Ω est le centre d'un losange, et même d'un hexagone inscrit dans la courbe Γ (coupée par la droite d'équation $Y - Y_\Omega + X - X_\Omega = 0$).

* Aucune tangente à Γ ne traverse la courbe. En effet si une tangente traversait la courbe, en son point de contact ou en un autre point, elle aurait dans les deux cas quatre points au moins en commun avec la courbe, ce qui est impossible.

Γ est d'un même côté de chacune de ses tangentes. Les fonctions Y_1 et Y_2 sont convexes.

* L'asymptote $X + Y = \alpha$ ne coupe pas Γ : si elle coupait Γ , ce serait en deux points au moins, distincts ou confondus. Comme le point à l'infini de l'asymptote compte pour deux, et que la cubique est supposée non décomposée, c'est impossible. Γ est donc contenue dans l'une des régions déterminée dans le premier quadrant par la droite d'équation $X + Y - \alpha = 0$. Pour savoir dans laquelle, il suffit de prendre un point (X_0, Y_0) de Γ et de chercher le signe de $X_0 + Y_0 - \alpha$. On peut utiliser le point d'abscisse minimum de Γ , à savoir $X_1 = (d - a)^2$ dans le 1er et le 3ème cas, $X_2 = (b - c)^2$ dans le 2ème cas (cf. § 4 -1, p. 9). Les résultats des calculs sont les suivants :

$$\begin{aligned} X_1 &= (d - a)^2 & X_2 &= (b - c)^2 \\ Y_1 &= \frac{d(b^2 - a^2) + a(d^2 - c^2)}{d - a} & Y_2 &= \frac{b(c^2 + d^2) - c(a^2 + b^2)}{b - c} \\ X_1 + Y_1 - \alpha &= \frac{a(b^2 - d^2) + d(a^2 - c^2)}{d - a} & X_2 + Y_2 - \alpha &= -3bc - \frac{c(d^2 - a^2) + a^2(c - b)}{c - b} \end{aligned}$$

A gauche, le signe est $-$ car $d \geq b$ et a plus petit côté. A droite le signe est $-$ parce que, dans ce 2ème cas, c est plus grand côté (a étant toujours plus petit côté). On en déduit que $X + Y \leq \alpha$ pour tout point (X, Y) de Γ .

6 - 1. *Cas du quadrilatère unicursal : la cubique associée a un seul point double (elle est unicursale)*

$\Delta(X)$ a une racine double non nulle équivaut à l'existence d'un point double pour C comme nous allons le montrer. D'après le tableau de la page 9 et les conventions faites (a plus petit côté, $d \geq b$), les seuls cas de racine double pour $\Delta(X)$ sont :

$$\begin{aligned} a + c &= b + d & a + d &= b + c \\ (c \text{ plus grand côté}) & & (d \text{ plus grand côté}) & \end{aligned}$$

Les deux cas ne peuvent pas avoir lieu en même temps et la racine double ne peut pas être nulle, à moins d'être dans un cas de décomposition. Soit W le point de C dont l'abscisse X_W est racine double de $\Delta(X)$. Pour X voisin de X_W à droite ou à gauche il existe deux valeurs de Y distinctes, donc deux branches de C qui se coupent en W : W est point double de C .

$$\begin{aligned} \text{si } c \text{ est plus grand côté} & & \text{si } d \text{ est plus grand côté} \\ X_W &= (d - a)^2 = (c - b)^2 & X_W &= (a + d)^2 = (b + c)^2 \\ Y_W &= (c - d)^2 = (b - a)^2 & Y_W &= (d - c)^2 = (b - a)^2 \end{aligned}$$

Les tangentes au point double sont distinctes. Pour calculer leurs pentes, le plus simple est de dériver au point X_W les expressions de Y fonction de X . Dans le cas où c est le plus grand côté :

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{X}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2X} \pm \frac{X - X_W}{2X} \sqrt{[X - (d + a)^2][X - (c + b)^2]} \\ Y'[(d - a)^2] &= \frac{(\sqrt{bd} \pm \sqrt{ac})^2}{(d - a)(c - b)} \end{aligned}$$

Dans le cas où d est le plus grand côté :

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{X}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2X} \pm \frac{X - X_W}{2X} \sqrt{[X - (d - a)^2][X - (c - b)^2]} \\ Y'[(a + d)^2] &= -\frac{(\sqrt{bd} \pm \sqrt{ac})^2}{(d + a)(b + c)} \end{aligned}$$

Le point W appartient aux deux hyperboles diamétrales (H_1) et (H_2) . Les deux hyperboles se recoupent en un point Ω et un seul à l'intérieur du rectangle circonscrit à Γ . Ce point est le centre d'un losange inscrit dans la courbe comme dans le cas elliptique. L'arc ouvert $\Gamma \setminus \{W\}$ est de classe C^1 , le point W est un point anguleux dont les pentes des tangentes sont données par les formules ci-dessus. On montre comme dans le cas elliptique que la partie du plan limitée par Γ est convexe. L'ensemble des cas ayant été examiné, nous avons prouvé :

Théorème : pour que la cubique attachée à un quadrilatère ait un point double, il faut et il suffit que la somme des longueurs de deux côtés soit égale à la somme des deux autres, sans que les quatre côtés soient égaux deux à deux.

6 - 2. Majoration de la somme des carrés des longueurs des diagonales dans un quadrilatère

Dans le cas unicursal comme dans le cas elliptique, on montre que Γ est contenue dans le triangle $X = 0, Y = 0, X + Y = \alpha$. L'inégalité $X + Y - \alpha \leq 0$ est valable aussi dans les cas de décomposition comme on le lit sur les graphiques du § 3. Le seul cas où Γ contient un point, et donc un segment, de la droite $X + Y = \alpha$ est celui du parallélogramme.

Théorème : pour tout quadrilatère, convexe, uniconcave ou croisé, la somme des carrés des longueurs des diagonales est inférieure ou égale à la somme des carrés des quatre côtés. Le cas de l'égalité caractérise les parallélogrammes dans l'ensemble des quadrilatères.

Ce théorème résulte d'ailleurs d'un calcul vectoriel élémentaire : quatre points d'un espace affine euclidien satisfont à l'identité :

$$BD^2 + AC^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

L'intérêt supplémentaire de cette identité est sa généralisation immédiate à $2n$ points. Elle sera utilisée dans le chapitre sur l'octaèdre articulé. Les deux points de Γ à tangente parallèle à la deuxième bissectrice des axes sont tels que

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial Y}$$

où $f(X, Y) = -XY(X + Y - \alpha) + \beta Y + \gamma X + \delta = 0$. Ils appartiennent à l'hyperbole équilatère d'équation

$$(X - Y)(X + Y - \alpha) + \gamma - \beta = 0.$$

Pour un quadrilatère elliptique, on peut trouver ainsi les deux positions pour lesquelles la somme des carrés des longueurs des diagonales atteint son maximum et son minimum.

7. Représentation paramétrique rationnelle de C dans le cas unicursal

7 - 0. Les équations paramétriques de C

Faisons une translation des axes, W étant la nouvelle origine. Les coordonnées dans les nouveaux axes sont notées ξ, η :

$$\xi = X - X_W, \quad \eta = Y - Y_W.$$

Posons $g(\xi, \eta) = f(\xi + X_W, \eta + Y_W)$, où $f(X, Y) = -XY(X + Y - \alpha) + \beta Y + \gamma X + \delta$. Après calculs on obtient l'équation de C dans les nouveaux axes :

$$\xi\eta(\xi + \eta) + \xi^2 Y_W + \eta^2 X_W + 2\xi\eta(X_W + Y_W - \frac{\alpha}{2}) = 0.$$

L'ensemble des termes du second degré s'écrit :

* dans le cas où $a + c = b + d$, plus grand côté opposé au plus petit, $X_W = (d - a)(c - b)$, $Y_W = (c - d)(b - a)$:

$$\xi^2 Y_W + \eta^2 X_W + 2\xi\eta(X_W + Y_W - \frac{\alpha}{2}) = (d - a)(c - b)\eta^2 + (c - d)(b - a)\xi^2 - 2\xi\eta(bd + ac)$$

* dans le cas où $a + d = b + c$, plus grand côté adjacent au plus petit, $X_W = (a + d)(b + c)$, $Y_W = (d - c)(b - a)$:

$$\xi^2 Y_W + \eta^2 X_W + 2\xi\eta(X_W + Y_W - \frac{\alpha}{2}) = (d + a)(c + b)\eta^2 + (d - c)(b - a)\xi^2 + 2\xi\eta(bd + ac)$$

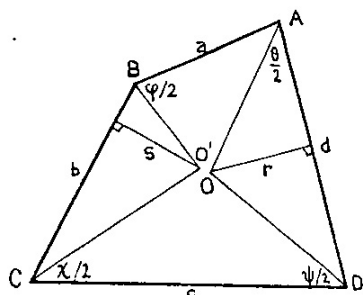
Prenant comme paramètre t la pente d'une droite passant par W , soit $\eta = t\xi$, et revenant aux anciennes coordonnées, on trouve :

| | |
|---|--|
| pour $a + c = b + d$: | pour $a + d = b + c$: |
| $X = \frac{(d + a)(b + c)t - (c - d)(b - a)}{t(1 + t)}$ | $X = \frac{(d - a)(c - b)t - (d - c)(b - a)}{t(1 + t)}$ |
| $Y = \frac{(a + b)(c + d)t - (d - a)(c - b)t^2}{1 + t}$ | $Y = -\frac{(a + b)(c + d)t + (a + d)(b + c)t^2}{1 + t}$ |

Les intervalles dans lesquels doit varier t pour obtenir la partie utile Γ de la cubique, celle qui décrit le quadrilatère articulé, sont respectivement (d'après le calcul des pentes des tangentes à C en W) :

$$\frac{(\sqrt{bd} - \sqrt{ac})^2}{(d - a)(c - b)} \leq t \leq \frac{(\sqrt{bd} + \sqrt{ac})^2}{(d - a)(c - b)}, \quad \frac{(\sqrt{bd} - \sqrt{ac})^2}{(d + a)(c + b)} \leq -t \leq \frac{(\sqrt{bd} + \sqrt{ac})^2}{(d + a)(c + b)}.$$

7 - 1. Interprétation géométrique de la condition d'unicursalité



Soient $\theta, \varphi, \chi, \psi$, les angles du quadrilatère articulé en ses sommets A, B, C, D . Il s'agit, dans tous les cas de figure, de l'angle du triangle formé par les deux tiges articulées en ce sommet. Dans le cas d'un quadrilatère *convexe* (voir figure ci-contre) :

$$(1) \quad \theta + \varphi + \chi + \psi = 2\pi.$$

Les angles du quadrilatère articulé de côtés a, b, c, d , sont déterminés dès lors qu'une position est donnée par les relations :

$$(2) \quad X = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta = b^2 + c^2 - 2bc \cos \chi, \quad Y = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos \psi.$$

Dans le cas où c , opposé à a , est plus grand côté ($a + c = b + d$), $t = \eta/\xi$ s'écrit des quatre façons différentes :

$$t = \frac{Y - (c - d)^2}{X - (d - a)^2} = \frac{Y - (c - d)^2}{X - (c - b)^2} = \frac{Y - (b - a)^2}{X - (d - a)^2} = \frac{Y - (b - a)^2}{X - (c - b)^2}$$

où encore, en remplaçant X et Y par leurs expressions ci-dessus rappelées :

$$t = \frac{c \sin^2(\psi/2)}{a \sin^2(\theta/2)} = \frac{d \sin^2(\psi/2)}{b \sin^2(\chi/2)} = \frac{b \sin^2(\varphi/2)}{d \sin^2(\theta/2)} = \frac{a \sin^2(\varphi/2)}{c \sin^2(\chi/2)}.$$

On en déduit les relations entre les sinus des quatre angles :

$$a \sin(\theta/2) \sin(\varphi/2) = c \sin(\chi/2) \sin(\psi/2) \quad , \quad d \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) = b \sin(\varphi/2) \sin(\chi/2).$$

Soit O l'intersection des bissectrices *intérieures* des angles A et D du quadrilatère, O' l'intersection des bissectrices *intérieures* des angles B et C . Soient u et v les angles en O et O' des triangles DOA et $CO'B$ respectivement, r la distance de O à AD , s la distance de O' à BC .

D'après (1) $u + v = \pi$, donc $\sin u = \sin v$. La proportionnalité entre les longueurs de côtés et les sinus des angles opposés dans les triangles DOA et $CO'B$ permet d'écrire :

$$d \sin(\theta/2) = OD \sin u \quad , \quad b \sin(\chi/2) = O'B \sin v.$$

Enfin $r = OD \sin(\psi/2)$ et $s = O'B \sin(\varphi/2)$.

On obtient : $rb \sin(\varphi/2) \sin(\chi/2) = sd \sin(\theta/2) \sin(\psi/2)$ et, grâce aux relations entre les sinus des quatre angles :

$$r = s$$

O est à la distance r des droites AB et CD , O' aussi. O et O' sont confondus, car ils sont dans l'angle des droites AB et CD qui contient le quadrilatère.

Nous avons démontré *dans un cas* que le quadrilatère $ABCD$ est circonscriptible à un cercle. Dans tous les cas on peut vérifier de la même façon que les quatre droites qui portent les côtés d'un quadrilatère unicursal sont tangentes à un même cercle.

Réciproquement, si le quadrilatère $ABCD$ est circonscriptible à un cercle, ses quatre longueurs de côtés s'expriment chacune par une somme ou une différence de deux segments de tangentes issues de deux sommets consécutifs du quadrilatère. On vérifie ainsi facilement soit la relation $a + c = b + d$ soit la relation $a + d = b + c$.

Dans les cas de décomposition, les quatre droites portant les côtés du quadrilatère sont tangentes à deux cercles (dont les centres sont à l'infini dans le cas du parallélogramme). Réciproquement, les quadrilatères formés par quatre droites tangentes à deux cercles sont décomposés au sens du § 3.

Théorème : pour qu'un quadrilatère soit unicursal, il faut et il suffit qu'il soit circonscriptible à un cercle et à un seul.

La circonscriptibilité à un cercle d'un quadrilatère unicursal peut s'interpréter comme un cas particulier de ce qui se passe en trois dimensions. On verra au §10 la belle démonstration de Lebesgue (5), qui s'adapte facilement au cas du quadrilatère plan et qui est indépendante du cas de figure. C'est pourquoi il a paru préférable de ne pas faire figurer ici l'ensemble des vérifications. Cependant, ce travail a conduit au résultat suivant :

Remarque: il n'existe pas de quadrilatère unicursal croisé tel que le plus grand côté soit opposé au plus petit.

Cela tient à ce que, pour un quadrilatère convexe ou uniconcave, le cercle inscrit peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du quadrilatère, ce qui donne des relations différentes entre les longueurs des côtés et les longueurs des segments de tangente. Pour un quadrilatère croisé, il n'y a qu'une situation.

8. Connexité de l'ensemble des positions du quadrilatère articulé

8 - 0. Transformation d'un mouvement sur un cercle en un mouvement sur un autre cercle

Fixons deux sommets A et D du quadrilatère $ABCD$. Soit $C(A,a)$ le cercle de centre A et de rayon a , $C(D,c)$ le cercle de centre D de rayon c . Une position du quadrilatère est déterminée par un couple (B,C) tel que $B \in C(A,a)$, $C \in C(D,c)$, $BC = b$. Dans le vocabulaire mécanique, (Koenigs (2) p. 256), les tiges AB et DC sont les manivelles, BC la bielle, et le système s'appelle un trois-barres. Dans ce paragraphe comme dans les figures qui suivent on suppose $a < c < b < d$; les résultats sont les mêmes si c est plus grand côté. On reprend les notations du § 1 p. 5; ici $\mathbf{E} = a + d$, $\mathbf{M} = b + c$.

Premier cas : A est pivot à révolution complète, E < M (le quadrilatère est elliptique)

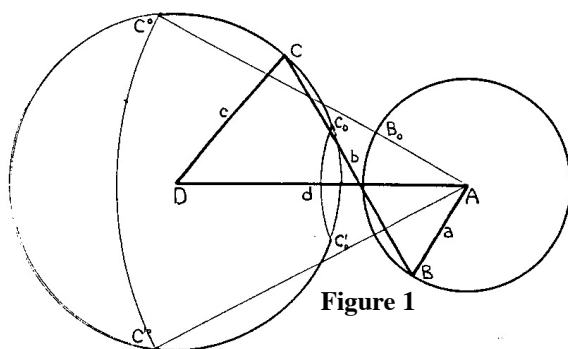


Figure 1

La partie utile sur $C(D,c)$ est l'ensemble des deux arcs disjoints C^0C_0 et $C^0C'_0$ définis par (cf. p. 9)

$$(b - a)^2 \leq Y = AC^2 \leq (a + b)^2.$$

La partie utile sur $C(A,a)$ est le cercle entier. La bielle associe un mouvement alternatif sur l'un des arcs utiles de $C(D,c)$ et un mouvement circulaire à révolution complète. Le mouvement du quadrilatère articulé n'est pas symétrique par rapport à la droite AD puisqu'il faut bien choisir pour trajectoire de C l'un des arcs utiles sur $C(D,c)$. Sur la figure 1 l'arc choisi est C^0C_0 .

Deuxième cas : A est pivot à révolution complète, E = M (le quadrilatère est unicursal)

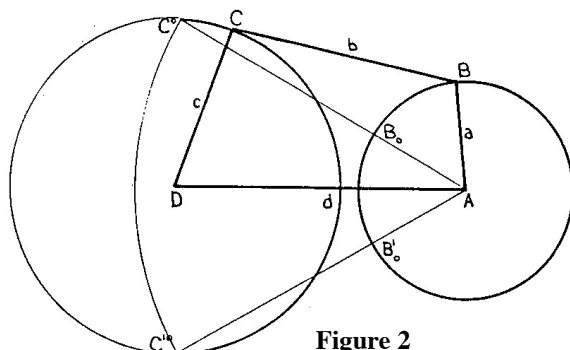


Figure 2

La trajectoire de B est $C(A,a)$ entier; celle de C est un arc du cercle $C(D,c)$ admettant la droite AD comme axe de symétrie, arc C^0C^0 défini par $Y = AC^2 \leq (a + b)^2$. La limite inférieure de Y a disparu du fait que $a + d = b + c$. Comme précédemment la bielle associe un mouvement alternatif et un mouvement à révolution complète, mais l'ensemble des positions du quadrilatère admet AD comme axe de symétrie.

Troisième cas : il n'y a pas de pivot à révolution complète, E > M (le quadrilatère est elliptique)

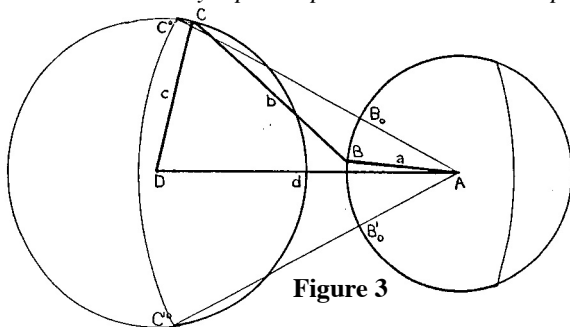


Figure 3

Les trajectoires de B et de C sont limitées chacune à un arc de cercle (cf. p. 9)

$$Y = AC^2 < (a + b)^2, \quad X = DB^2 < (b + c)^2.$$

La bielle associe deux mouvements alternatifs; l'ensemble des positions du quadrilatère admet la droite AD comme axe de symétrie.

8 - 1. L'ensemble Π des positions du quadrilatère et la courbe Γ associée

Rappelons (cf. § 1) que nous avons appelé position d'un quadrilatère articulé sa classe d'équivalence à déplacement près. A et D étant fixés, l'ensemble des positions de $Q(a,b,c,d)$ s'identifie à :

$$\Pi = \{(B,C) \text{ tel que } B \in C(A,a), C \in C(D,c), BC = b\}.$$

Deux quadrilatères AB_1C_1D et AB_2C_2D sont voisins si B_1 est voisin de B_2 et C_1 voisin de C_2 ; comme BC est de longueur constante, C_1 voisin de C_2 (ou B_1 voisin de B_2) suffit localement. A une position $ABCD$ correspondent deux longueurs de diagonales, donc un point sur Γ ; inversement la donnée d'un point (X,Y) de Γ permet de construire deux points B_1 et B_2 sur $C(A,a)$ à la distance \sqrt{X} de D , puis deux points C_1 et C_2 sur $C(D,c)$ à la distance \sqrt{Y} de A , points qui doivent être associés de manière que $C_1B_1 = C_2B_2 = b$: les deux positions AB_1C_1D et AB_2C_2D sont symétriques par rapport à la droite AD .

L'application définie sur Π , qui à une position du quadrilatère $ABCD$ fait correspondre le point M de Γ de coordonnées $X = DB^2$, $Y = AC^2$, envoie deux positions symétriques du quadrilatère sur le même point de Γ . La courbe Γ est parcourue en général deux fois quand le quadrilatère $ABCD$ prend toutes les positions possibles.

Dans le cas particulier où Γ est symétrique par rapport à la première bissectrice, Γ n'est parcourue qu'une fois quand le quadrilatère $ABCD$ prend toutes les positions possibles. Dans le paragraphe suivant, nous supposons $\beta \neq \gamma$ (deux côtés opposés ne sont pas égaux).

8 - 2. Les composantes connexes de l'ensemble des positions

* $E < M$ (figure 1, p. 14)

Quand le point C parcourt l'un des arcs utiles sur $C(D,c)$, soit C_0C^0 , de C_0 vers C^0 et retour, le point B effectue une révolution complète sur $C(A,a)$. Dans ce mouvement, chacune des longueurs des diagonales passe une fois exactement par son minimum et son maximum : le point M représentatif du quadrilatère décrit Γ une fois. Si le point C circule sur l'autre arc utile, M décrit Γ également une fois. Dans les deux cas, le quadrilatère revient à sa position initiale après que son point représentatif ait fait un tour sur Γ dans un sens ou dans l'autre.

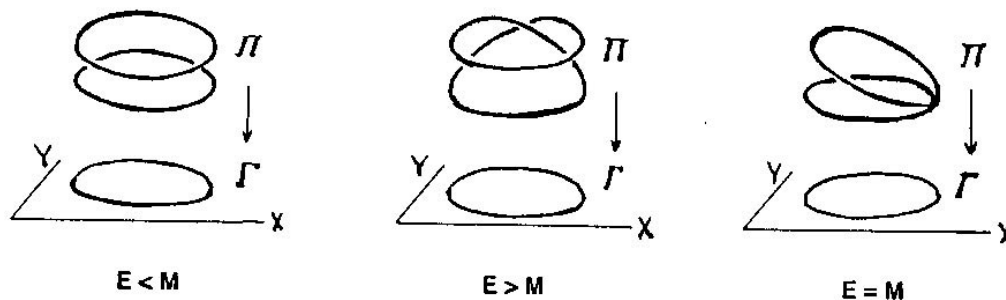
Pour $E < M$, l'ensemble des positions du quadrilatère a deux composantes connexes homéomorphes chacune à une copie de Γ .

* $E \geq M$ (figures 2 et 3, p. 14)

C^0C^0 est l'arc utile sur $C(D,c)$, B_0 est l'unique point de $C(A,a)$ tel que $C^0B_0 = b$, M_0 est le point de Γ représentant AB_0C^0D . Quand C va de C^0 à C^0 , Y parcourt deux fois son intervalle de définition, de $(a+b)^2$ à $(d-c)^2$ pour la partie de l'arc utile au dessus de la droite AD , de $(d-c)^2$ à $(a+b)^2$ pour la partie au dessous de la droite AD . Pendant ce parcours, si le mouvement de B ne change de sens qu'aux points limites de l'arc qu'il décrit dans le cas de la figure 3, et s'il ne change pas de sens dans le cas de la figure 2, X passe une fois par son maximum et une fois par son minimum. Γ est parcourue en entier une fois, de M_0 à M_0 , mais la position du quadrilatère au retour est symétrique de la position de départ par rapport à la droite AD . Quand C revient de C^0 à C^0 , le point représentatif du quadrilatère décrit Γ une autre fois. A partir de n'importe quelle position le quadrilatère $ABCD$ peut se retourner continûment sans quitter le plan de figure, et, pendant ce mouvement son point représentatif décrit Γ une fois.

Pour $E \geq M$ l'ensemble des positions du quadrilatère est connexe.

L'application $\Pi \rightarrow \Gamma$ peut être figurée par les dessins ci-après.



9. Le théorème de Darboux

9 - 0. La suite des quadrilatères de Darboux

Soient a, b, c, d les longueurs des tiges d'un quadrilatère articulé. Quatre points A, B, C, D du plan tels que $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, représentent une position Q du quadrilatère articulé. Par abus de langage on note $Q = ABCD$. Comme précédemment, $BD^2 = X, AC^2 = Y$.

- Construisons le symétrique A_1 de A par rapport à la diagonale BD et soit :

$$Q_1 = A_1BCD$$

Q et Q_1 ont en commun la diagonale BD . L'autre diagonale de Q_1 est A_1C . $X_1 = X, Y_1 = A_1C^2$.

- Construisons le symétrique D_2 de D par rapport à la diagonale A_1C , qui n'est pas celle commune à Q et à Q_1 :

$$Q_2 = A_1BCD_2$$

Q_2 et Q_1 ont en commun la diagonale A_1C . L'autre diagonale est BD_2 . $X_2 = BD_2^2, Y_2 = Y_1$.

On construit ainsi une suite (Q_n) de positions du quadrilatère (a, b, c, d) telle que :

* deux positions consécutives ont en commun une diagonale,

* $Q_n, n > 2$, est obtenue à partir de Q_{n-1} en choisissant un des deux sommets extrémités de la diagonale commune à Q_{n-1} et Q_{n-2} , et en le remplaçant par son symétrique par rapport à l'autre diagonale de Q_{n-1} . Suivant le sommet choisi, on trouve une position pour Q_n , ou la position de sens contraire : l'une et l'autre définissent la même "forme" (cf. § 0, définition, deux quadrilatères ont la même forme s'il existe une isométrie du plan qui envoie l'un sur l'autre).

Voici l'énoncé de Darboux **(1)**, deuxième Note :

- ou bien la suite (Q_n) comprend un nombre illimité de formes distinctes du quadrilatère, et alors la même propriété subsiste quand on prend pour point de départ toute autre forme de Q ,

- ou bien la suite (Q_n) contient un nombre limité de formes distinctes, et, quelle que soit la forme initiale de Q , ce nombre est toujours limité, et toujours le même dans chaque suite.

Soit Γ la partie utile de la cubique associée au quadrilatère (a, b, c, d) ; soient X_n et Y_n les carrés des longueurs des diagonales de Q_n et soit $M_n = (X_n, Y_n)$ le point de Γ associé à Q_n , qui définit la "forme" de Q_n , à isométrie près. Dans la construction de la suite de Darboux explicitée ci-dessus, M_n et M_{n+1} ont même abscisse si n est pair, même ordonnée si n est impair. D'après le théorème de Darboux, *quelle que soit la position initiale de $Q(a, b, c, d)$ il n'y a que deux cas possibles pour la suite M_n de points de Γ :*

- $n \neq n' \Rightarrow M_n \neq M_{n'}$ pour tout couple d'entiers n et n' ,

- la suite M_n comporte un nombre fini de points distincts, en général pair, sommets d'un polygone à côtés parallèles aux axes inscrit dans Γ .

Une situation tout à fait analogue se présente dans l'étude des polygones inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre. L'analogie tient à la présence des fonctions elliptiques dans les deux cas (cf. Berger **(7)** 16-6). Pour l'analogie surtout, et aussi pour la condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, le grand théorème de Poncelet (pour les cercles) fait l'objet du paragraphe suivant.

9 - 1. Le grand théorème de Poncelet pour les cercles

Soient deux cercles dans le plan, $C(O, R)$ et $\Gamma(\omega, r)$, le second intérieur au premier. La distance des centres $O\omega$ est notée d dans ce paragraphe. Par un point M de C , on mène une tangente à Γ qui coupe C en M_1 . On construit ensuite l'autre tangente à Γ issue de M_1 , qui recoupe C en M_2 , et ainsi de suite. On obtient une suite (M_n) de points de C telle que pour tout i la droite $M_i M_{i+1}$ est tangente à Γ et distincte de $M_i M_{i-1}$. Le théorème de Poncelet s'énonce :

- ou bien, quel que soit le point M choisi sur C , $n \neq n' \Rightarrow M_n \neq M_{n'}$ pour tout couple d'entiers n et n' ,

- ou bien il existe n tel que, quel que soit le point initial M choisi sur C , $M_n = M$.

On se trouve dans le deuxième cas si et seulement si une relation (n) liant les rayons R, r et la distance des centres d est satisfaite. On explicite pour $n = 3$ et $n = 4$:

$n = 3$. Pour qu'un triangle soit inscrit dans un cercle de rayon R et circonscrit à un cercle de rayon r , il faut et il suffit $(d, \text{distance des centres})$

$$(3) \quad R^2 - d^2 = 2rR.$$

$n = 4$. Pour qu'un quadrilatère soit inscrit dans un cercle de rayon R et circonscrit à un cercle de rayon r , il faut et il suffit (d , distance des centres)

$$(4) \quad (R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

Ces relations se démontrent élémentairement. Il n'est même pas besoin, pour la seconde, de connaître la condition d'inscriptibilité d'un quadrilatère dans un cercle (théorème de Ptolémée)¹.

Cayley a déterminé la relation (n) quel que soit n (Berger (7), 16 - 6 - 12 - 4).

Revenons au théorème de Darboux. Les propriétés de la courbe Γ précédemment étudiées vont permettre de dire quels sont les quadrilatères pour lesquels le nombre de formes est en général quatre, quels sont les quadrilatères pour lesquels le nombre des formes est en général 6, et dans quels cas la suite infinie des formes tend ou non vers une forme limite.

9 - 2. Condition nécessaire et suffisante pour que la suite (Q_n) présente quatre formes distinctes

Supposons que l'image des termes de la suite Q_n sur Γ soit l'ensemble de quatre points : il existe deux valeurs distinctes de X , soient X_1 et X_2 , telles que (cf. § 4-1) les deux équations à l'inconnue Y

$$\begin{aligned} -X_1 Y^2 + (-X_1^2 + \alpha X_1 + \beta) Y + \gamma X_1 + \delta &= 0 \\ -X_2 Y^2 + (-X_2^2 + \alpha X_2 + \beta) Y + \gamma X_2 + \delta &= 0 \end{aligned}$$

aient deux racines communes. Ecrivant que leurs coefficients sont proportionnels, on trouve :

$$X_1 X_2 + \beta = 0 \quad , \quad \delta = 0.$$

Alors les deux racines communes Y_1 et Y_2 ont pour produit $\gamma X_1 - \delta / X_1 = -\gamma$:

$$Y_1 Y_2 + \gamma = 0.$$

La condition $\delta = 0$ ne dépend que des longueurs des tiges a, b, c, d .

Si elle est remplie, et si $Q(a, b, c, d)$ est tel que ni β ni γ ne soient nuls, prenons un point $M = (X, Y)$ arbitraire sur Γ représentant la forme initiale du quadrilatère. Soit $X_1 = -\beta/X$ et $Y_1 = -\gamma/Y$,

$$M_0 = (X, Y) \quad , \quad M_1 = (X, Y_1) \quad , \quad M_2 = (X_1, Y_1) \quad , \quad M_3 = (X_1, Y)$$

sont les quatre sommets d'un rectangle inscrit dans Γ . Les quatre suites extraites de (M_n) :

$$M_{4p+i} = M_i \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \text{ et pour tout } p,$$

sont stationnaires. Dans le cas où $X = \sqrt{-\beta} = X_1$, Y et Y_1 sont les ordonnées de deux points de Γ à tangente parallèle à l'axe des X qui se trouvent avoir même abscisse. De même, $Y_1 = Y_2 = \sqrt{-\gamma}$ est l'ordonnée commune des deux points de Γ à tangente parallèle à l'axe des Y . Ceci signifie que si la position initiale est telle que A, B, D soient alignés, ou que A, B, C soient alignés, le quadrilatère Q_n ne peut prendre que deux formes quel que soit n , deux formes triangulaires.

Il reste à voir comment sont faits ces quadrilatères pour lesquels la suite de Darboux prend quatre formes, qui se réduisent à deux quand la forme initiale est celle d'un triangle.

Interprétation géométrique de la condition $\delta = 0$

D'après l'expression de δ donnée au paragraphe 2, il y a deux cas :

* $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. **$Q(a, b, c, d)$ est un quadrilatère à diagonales rectangulaires.**

On pourra démontrer dans ce cas :

$$a \text{ plus petit côté} \Rightarrow c \text{ plus grand côté} \quad \quad \mathbf{E} = a + c < \mathbf{M} = b + d.$$

Donc deux pivots à rotation complète, deux composantes connexes de l'ensemble des positions. On pourra voir page 18 une construction de la suite des quatre quadrilatères et les quatre points qui leur correspondent sur la courbe Γ .

1. Dans nos notations, $xy = ac + bd$, ou $xy = |ac - bd|$. Pour tout $Q(a, b, c, d)$, il existe deux formes inscriptibles dans un cercle.

* $ac = bd$. Les bissectrices de deux angles opposés se coupent sur la diagonale qui joint les deux autres sommets. Il est moins facile de montrer géométriquement que le processus se termine en quatre étapes ; une construction est faite plus bas. Dans ce cas :

$$a \text{ plus petit côté} \Rightarrow c \text{ plus grand côté} \quad \mathbf{E} = a + c > \mathbf{M} = b + d.$$

Il n'y a pas de pivot à rotation complète, l'ensemble des positions est connexe.

Un quadrilatère tel que $\delta = 0$ est elliptique, ou bien on se trouve dans un cas de décomposition.

En effet la condition d'unicursalité, jointe à l'une des conditions ci-dessus, entraîne l'autre ; alors :

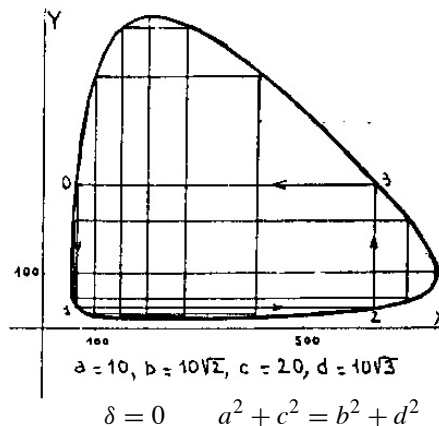
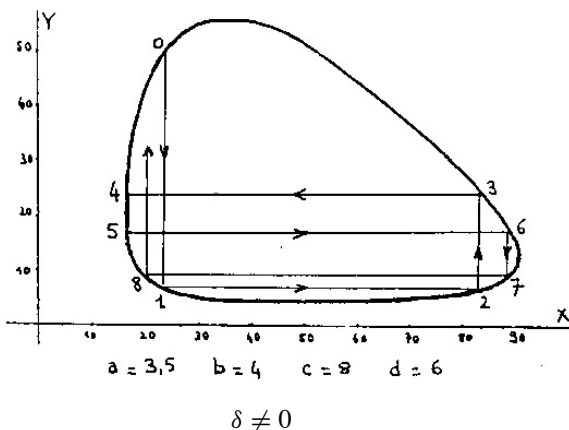
$$(a + c = b + d \text{ et } ac = bd) \Rightarrow (a = b \text{ et } c = d) \text{ ou } (a = d \text{ et } b = c).$$

Pour un quadrilatère bi-isocèle, losange compris, on vérifie (voir figure p. 7) qu'il y a bien une famille infinie de rectangles, à côtés parallèles aux axes, inscrits dans la courbe Γ . La traduction de la position des quatre sommets d'un tel rectangle en termes de formes du quadrilatère bi-isocèle concerné se fait bien, même si le procédé de construction d'un quadrilatère de la suite de Darboux à partir des deux précédents apparaît en défaut quand la diagonale par rapport à laquelle il faut symétriser n'est pas définie.

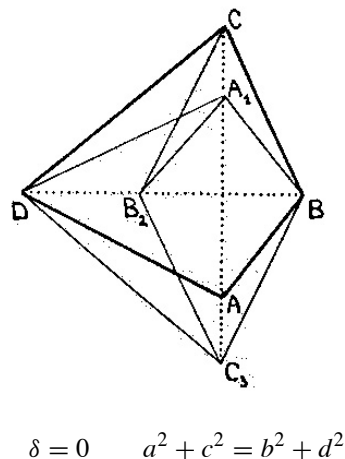
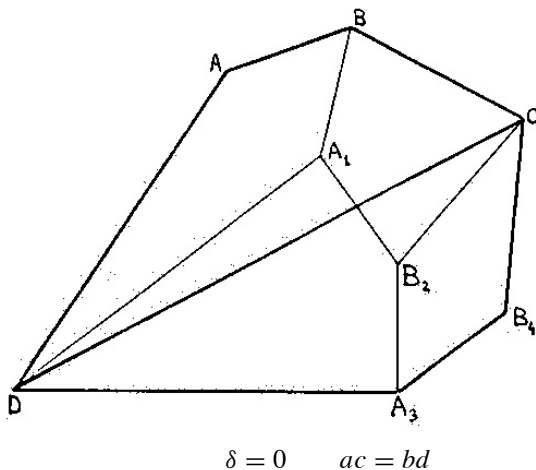
9 - 3. Condition nécessaire et suffisante pour que la suite (Q_n) présente six formes distinctes

Les points représentatifs de (Q_n) sont alors les sommets d'un hexagone à côtés parallèles aux axes inscrit dans Γ . Il existe un cas particulier très simple de quadrilatère pour lequel il en est ainsi, $Q(a, b, b, b)$ ou $Q(a, a, a, d)$, alors $\beta = \gamma = 0$, voir figure, page 19. Par des calculs du même genre que ceux faits en 9 - 2, seulement plus compliqués, on trouve la condition générale (6), p. 19.

La suite de Darboux est bornée divergente si le quadrilatère est elliptique ou s'il est bi-isocèle

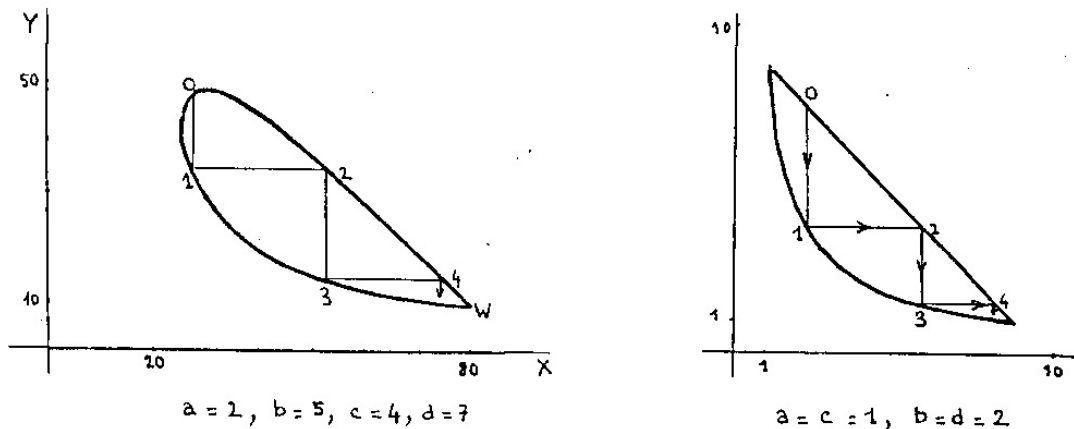


Les figures représentent la courbe Γ et la suite M_n dans le cas elliptique général (à gauche), et dans un des cas particuliers où elle tourne sur quatre points (à droite) : le cas d'un quadrilatère à diagonales rectangulaires.



Constructions dans les deux cas non décomposés où la suite de Darboux ne prend que quatre formes.

La suite de Darboux est convergente dans le cas unicursal et dans le cas parallélogramme



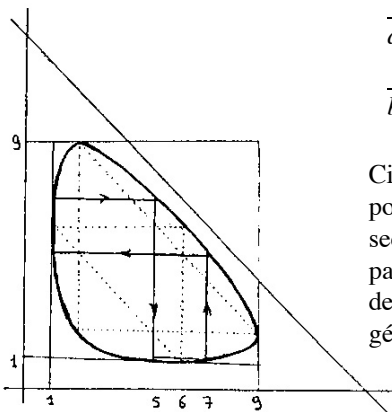
La courbe Γ et la suite M_n dans le cas unicursal (à gauche) et dans le cas parallélogramme convexe et croisé (à droite).

$$(6) \quad \delta^2(\beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0.$$

D'après les expressions de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ données §2 page 6 et après calculs, on trouve que la relation (6) se décompose en deux :

$$\frac{1}{a^2c^2 - b^2d^2} = \frac{1}{(b^2 - c^2)(c^2 - d^2)} + \frac{1}{(d^2 - a^2)(a^2 - b^2)}$$

$$\frac{1}{b^2d^2 - a^2c^2} = \frac{1}{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} + \frac{1}{(d^2 - a^2)(c^2 - d^2)}$$



Ci-contre on a dessiné la courbe Γ associée à $Q(1,2,2,2)$; deux points de cette courbe symétriques par rapport à la première bissectrice représentent la même forme du quadrilatère. Dans ce cas particulier, la suite de Darboux n'a que trois termes, même si on a dessiné l'hexagone entier pour montrer ce qui se passe dans le cas général (6).

Il pourra être agréable de lire Zvonkine (9) pour avoir une idée des problèmes de Géométrie élémentaire liés aux fonctions elliptiques et de la façon dont elles interviennent. On trouvera dans Berger (7) une bibliographie sur les fonctions elliptiques en relation avec ces problèmes.

9 - 4. *Convergence de la suite de Darboux*

*** Cas elliptique**

Il y a quatre points de Γ à tangentes parallèles aux axes. Ces quatre points définissent sur Γ quatre arcs fermés dont les intérieurs sont disjoints. Puisqu'il y a une infinité de points M_n sur Γ , l'un au moins des quatre arcs, soit A_1 , contient une infinité de points M_n . Pour chaque point M_n de A_1 , M_{n+1} appartient à la réunion des trois autres arcs fermés de Γ . Un autre arc A_2 contient donc une infinité de points M_n . Si A_1 et A_2 sont opposés sur Γ , il existe deux suites extraites convergentes vers des limites différentes puisque l'une est dans A_1 , l'autre dans A_2 ; il s'ensuit que la suite M_n diverge. Si A_1 et A_2 sont adjacents, pour tout point M_n de $A_1 \cup A_2$, M_{n+1} ou M_{n+2} appartient à $A_3 \cup A_4$. Il y a donc une infinité de points de la suite dans l'un au moins des deux arcs fermés A_3 et A_4 , et on termine comme précédemment.

Puisque (M_n) diverge, (Q_n) diverge.

Le cas étudié au § 9 - 2 est un cas particulier du cas elliptique où il y a en général quatre suites extraites stationnaires, deux si le point initial est pris à l'extrémité d'un arc.

*** Cas unicursal**

Trois arcs seulement A_1 , A_2 et A_3 sont séparés sur Γ par : le point anguleux W , le point à tangente parallèle à l'axe des X , le point à tangente parallèle à l'axe des Y . Les deux arcs fermés A_1 et A_2 , qui ont W en commun, sont les graphes de deux fonctions monotones de même sens ; il y a au plus un point de la suite M_n dans A_3 , soit M_m . Pour $n > m$, les points M_n sont alternativement sur A_1 et sur A_2 . La suite des abscisses des M_n , et la suite des ordonnées des M_n , sont monotones ; elles convergent respectivement vers l'abscisse et l'ordonnée de W :

$$\lim M_n = W.$$

La suite des formes au sens de Darboux converge vers la position du quadrilatère où les quatre sommets sont alignés, et comme cette position, antécédente de W dans l'application $\Pi \rightarrow \Gamma$ (cf. § 8 - 2) est unique, la suite (Q_n) des positions est également convergente vers la position alignée. Dans le cas du parallélogramme (fig. page 18 en bas à droite), il y a deux positions d'alignement suivant que B et D sont entre A et C , ou A et C entre B et D , et la suite des formes converge vers l'une ou l'autre de ces deux formes alignées suivant que la position initiale est un parallélogramme ou un contre-parallélogramme.

10. Quadrilatère articulé dans l'espace affine euclidien à trois dimensions E^3

Un quadrilatère articulé est défini, comme dans le plan, par la donnée de quatre tiges rigides de longueurs a, b, c, d , dans cet ordre, telles qu'un élément $\max(a, b, c, d)$ soit strictement inférieur à la somme des trois autres ; deux tiges consécutives sont supposées articulées en leur sommet commun. Les sommets A, B, C, D , ou pivots, sont quatre points de E^3 tels que :

$$AB = a \quad , \quad BC = b \quad , \quad CD = c \quad , \quad DA = d.$$

Une position dans E^3 du quadrilatère $Q(a, b, c, d)$ est la classe de la figure formée des quatre sommets et des quatre côtés à un déplacement près de E^3 . Le pivot A est dit à révolution complète (en abrégé r. c.), si D et A étant fixés, B peut parcourir l'ensemble des points de la sphère de centre A et de rayon a .

10 - 0 Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un pivot à révolution complète

Très peu de mots sont à changer au § 1 - 1, essentiellement "cercle" à remplacer par "sphère". Notons toujours **E** la somme des extrêmes, c'est à dire la somme d'une plus petite et d'une plus grande longueur parmi les quatre tiges, et **M** la somme des moyens, c'est à dire la somme des deux autres côtés.

Théorème : pour que $Q(a, b, c, d)$ ait un pivot à révolution complète, il faut et il suffit que $E \leq M$. Alors Q a au moins deux pivots à r. c. situés aux extrémités d'une tige de longueur minimum.

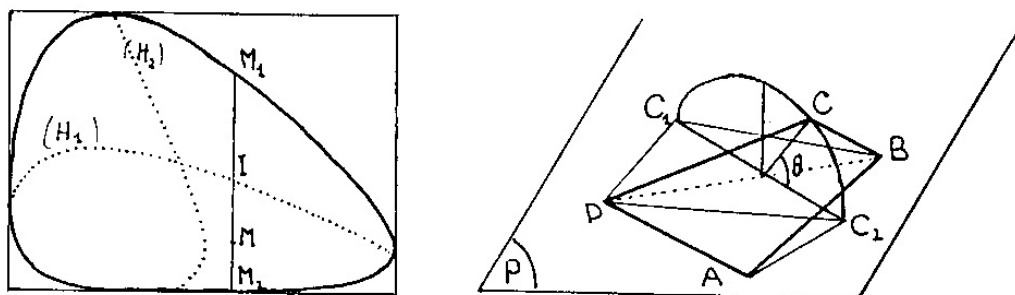
On suppose toujours dans la suite $a = \inf(a, b, c, d)$ et $d \geq b$. On appelle rhomboïde un quadrilatère (a, a, c, c) et paralléloïde un quadrilatère (a, b, a, b) . Un rhomboïde a trois pivots à r. c., un paralléloïde a quatre pivots à r. c.

10 - 1. Le domaine Δ qui décrit l'ensemble des positions d'un quadrilatère articulé de E^3

Soit $ABCD$ une position de $Q(a, b, c, d)$ telle que A, B, D ne soient pas alignés et soit (P) le plan BAD . Le sommet C peut tourner autour de la droite BD , décrivant un cercle d'axe BD , qui coupe (P) en C_1 et C_2 . Dans le plan (P) , ABC_1D et ABC_2D sont les deux positions planes de $Q(a, b, c, d)$ correspondant à la longueur de diagonale BD . Soit Γ , comme précédemment, la partie utile de la cubique C représentant la relation entre les longueurs des diagonales de $Q(a, b, c, d)$. Avec $BD^2 = X$, soient $Y_1 = AC_1^2$ et $Y_2 = AC_2^2$ les ordonnées des deux points de Γ d'abscisse X . Quand C décrit un demi cercle de C_1 jusqu'à C_2 , $Y = AC^2$ varie de façon monotone entre Y_1 et Y_2 . Ainsi, à une position $ABCD$ du quadrilatère correspond un point (X, Y) , $X = BD^2$, $Y = AC^2 \in [Y_1, Y_2]$. Nous avons construit une application de l'ensemble Π des positions du quadrilatère vers la partie convexe fermée Δ de frontière Γ dans le plan des X, Y .

Inversement, un point $M = (X, Y)$ intérieur à Δ étant donné, la parallèle à l'axe des Y passant par M coupe Γ en deux points M_1 et M_2 qui définissent les deux positions aplaties ABC_1D et ABC_2D . Le cercle de diamètre C_1C_2 situé dans le plan perpendiculaire à BD coupe la sphère de centre A et de rayon \sqrt{Y} en deux points C et C' symétriques par rapport au plan (P) , distincts de C_1 et C_2 . Les deux positions $ABCD$ et $ABC'D$ ont (X, Y) pour point représentatif dans Δ .

Théorème : Soit Π l'ensemble des positions de $Q(a, b, c, d)$ dans E^3 et Δ la partie convexe fermée définie par Γ dans le plan des (X, Y) . L'application $\Pi \rightarrow \Delta$ qui à une position de Q fait correspondre le couple des carrés des longueurs des diagonales est surjective. Chaque point de l'intérieur de Δ a deux antécédents dans cette application, qui sont deux positions isométriques de sens contraire. Chaque point de la frontière Γ de Δ a un seul antécédent qui est une position plane de $Q(a, b, c, d)$ dans E^3 .



On peut préciser la bijection entre le point M intérieur à Δ et la forme du quadrilatère gauche. Avec les notations précédentes, θ étant la mesure (entre 0 et π) du dièdre $A(BD)C$, A et C_1 étant de part et d'autre de BD , Y est fonction affine de $\cos \theta$. Comme $Y = Y_2$ (resp. Y_1) pour $\theta = 0$ (resp. π) $Y = ((Y_2 - Y_1)/2) \cos \theta + (Y_1 + Y_2)/2$.

Soit I le milieu de M_1M_2 ; l'équation précédente se traduit par $\overline{IM} = \overline{IM_2} \cos \theta$. Par exemple, si M appartient à l'hyperbole H_1 , lieu des milieux des cordes de Γ parallèles à l'axe des Y , $\cos \theta = 0$, le dièdre d'arête BD est droit. De même tout point de l'hyperbole H_2 représente une position telle que le dièdre d'arête AC soit droit. Alors Ω , unique point de l'intérieur de Δ qui soit à la fois sur H_1 et sur H_2 , représente l'unique position du quadrilatère articulé telle que les deux dièdres ayant pour arêtes les diagonales soient droits. Ω est aussi le point de Δ représentant la forme du tétraèdre $ABCD$ de volume maximum. On en déduit :

Le volume maximum du tétraèdre $ABCD$, les longueurs des arêtes de deux couples d'arêtes opposées étant fixées, est atteint lorsque les dièdres correspondant aux arêtes du troisième couple sont droits.

10 - 2. Connexité de l'ensemble des positions d'un quadrilatère articulé

D'après ce qui précède, Π est évidemment connexe puisqu'homéomorphe à la sphère S^2 de E^3 ; Δ est homéomorphe au disque B_1 , et l'application qui, à une position du quadrilatère, fait correspondre le couple des carrés des longueurs des diagonales, s'identifie à la projection canonique de S^2 sur B_1 .

10 - 3. Axe d'un quadrilatère gauche dont une position plane est un quadrilatère unicursal

Soit $Q(a, b, c, d)$ un quadrilatère articulé, ni rhomboïde, ni paralléloïde; $\mathbf{E} = \sup(a, b, c, d) + \inf(a, b, c, d)$ est la somme des longueurs de deux côtés, \mathbf{M} est la somme des longueurs des deux autres côtés. $C(a, b, c, d)$ est la cubique attachée au quadrilatère pour les longueurs a, b, c, d dans cet ordre comme il a été dit au paragraphe 2. On a vu pour un quadrilatère plan (cf. § 6 - 2) :

$$Q \text{ unicursal} \iff \mathbf{E} = \mathbf{M} \iff C(a, b, c, d) \text{ a un point double.}$$

De plus un quadrilatère plan unicursal est circonscriptible à un cercle et réciproquement. Nous allons voir que cette caractérisation se généralise à un quadrilatère gauche de l'espace euclidien à trois dimensions. La démonstration ci-dessous est due à Lebesgue (5).

Définition : un quadrilatère $Q(a, b, c, d)$ dans l'espace affine euclidien à trois dimensions est dit **unicursal** lorsque la somme des longueurs de deux de ses côtés est égale à la somme des longueurs des deux autres sans que ces quatre longueurs soient deux à deux égales.

Soit $Q(a, b, c, d)$ un quadrilatère unicursal dans l'espace à trois dimensions, et soit $ABCD$ une de ses positions. Pour simplifier on note $Q = ABCD$. $\mathbf{E} = \mathbf{M}$ signifie qu'on peut orienter les droites qui portent les côtés du quadrilatère de manière que les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}$ satisfassent à la relation

$$(1) \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0.$$

En effet un des nombres a, b, c, d n'étant pas la somme des trois autres, deux parmi les nombres algébriques ci-dessus sont des nombres positifs, et deux sont des nombres négatifs. Si quatre orientations conviennent pour réaliser (1), les quatre opposées conviennent et il y a que cette alternative dans le choix des orientations. A chaque sommet du quadrilatère, attachons les deux vecteurs unitaires qui définissent l'orientation des supports des côtés s'articulant en ce sommet. Le miroir qui fait se correspondre ces deux vecteurs ne dépend pas du choix des orientations parmi les deux possibles. Ainsi, passant par chaque sommet, existe un plan nommé plan bissecteur du quadrilatère en ce sommet. On note $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les plans bissecteurs de $Q = ABCD$; on désigne par la même lettre le plan bissecteur, et la symétrie par rapport au plan correspondant. Soit M un point de la droite AD . On pose:

$$M_1 = \alpha(M) \quad , \quad M_2 = \beta(M_1) \quad , \quad M_3 = \gamma(M_2) \quad , \quad M_4 = \delta(M_3).$$

M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent respectivement aux droites AB, BC, CA, AD , et sont définis sur chacun des axes qui les portent par :

$$\overline{AM} = \overline{AM_1} \quad , \quad \overline{BM_1} = \overline{BM_2} \quad , \quad \overline{CM_2} = \overline{CM_3} \quad , \quad \overline{DM_3} = \overline{DM_4}.$$

Transformant tous les second membres par la relation de Chasles, il vient :

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM_1}, \quad \overline{BM_1} = \overline{BC} + \overline{CM_2}, \quad \overline{CM_2} = \overline{CD} + \overline{DM_3}, \quad \overline{DM_3} = \overline{DA} + \overline{AM_4}.$$

Ajoutons membre à membre ces quatre égalités :

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AM_4}.$$

La relation (1) entraîne $M = M_4$ pour tout M appartenant à la droite AD . Donc, pour que $Q(a, b, c, d)$ soit unicursal, il faut que $\delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ laisse invariante la droite AD . Précisons cette condition ; posons :

$$R_c = \delta \circ \gamma \quad , \quad R_a = \beta \circ \alpha \quad , \quad R_c \circ R_a = R,$$

R_c et R_a sont deux rotations dont le produit est une rotation puisqu'il laisse une droite invariante. Dans E^3 , le produit de deux rotations est une rotation si et seulement si les axes de ces deux rotations ont au moins un point commun. S'ils ont un seul point commun, à distance finie ou infinie, l'axe de la rotation produit passe aussi par ce point ; c'est impossible dans le cas présent : en effet, l'axe de R_a , contenu dans le plan α , ne peut couper la droite AD qu'en A ; de même l'axe de R_c , contenu dans le plan γ ne peut couper la droite AD qu'en D , les trois axes ne peuvent donc pas être concourants. On en conclut que les axes des rotations R_a et R_c sont confondus. C'est dire que les quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ forment un faisceau (et $\delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ est l'application identique).

Réciproquement, supposons cette condition remplie pour une position $Q = ABCD$ d'un quadrilatère non décomposé. Supposons A, B, C, D non alignés (s'il l'étaient, Q serait évidemment unicursal) ; orientons les quatre supports des côtés du quadrilatère en cohérence avec les symétries $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et orientons arbitrairement la droite L d'intersection des quatre plans ; soient A', B', C', D' les projections orthogonales de A, B, C, D sur L ; la relation de Chasles, appliquée à ces quatre points, donne :

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'A'} = 0.$$

La droite L étant invariante par les symétries $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les axes qui portent les côtés du quadrilatère font deux à deux le même angle avec L , donc le même angle θ pour tous les quatre. La relation ci-dessus s'écrit :

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \cos \theta = 0.$$

Si $\cos \theta$ est nul, le quadrilatère Q est plan. L'hypothèse entraîne que les bissectrices des supports orientés en chaque sommet sont concourantes, le quadrilatère est circonscrit à un cercle, donc unicursal. Si $\cos \theta$ n'est pas nul, on retrouve la condition d'unicursalité, $\mathbf{E} = \mathbf{M}$.

Théorème : pour qu'un quadrilatère gauche non décomposé (cf. §3) soit unicursal, il faut et il suffit qu'il existe une position telle que quatre plans bissecteurs des supports des côtés en chaque sommet forment un faisceau. Alors il en est de même dans toutes les positions ; l'arête du faisceau s'appelle l'axe de la position ; pour chaque position, il y a un axe et un seul.

10 - 4. Cas du rhomboïde et du paralléloïde : les deux axes d'une position

Soit $Q(a,a,c,c)$ un rhomboïde, $a < c$. Quelle que soit sa position, Q admet un plan de symétrie, (un miroir), qui est le plan médiateur de la diagonale AC . Pour un paralléloïde $Q(a,b,a,b)$, $a < b$, prenons une position gauche : I et J étant les milieux des diagonales BD et AC respectivement, IJ est la perpendiculaire commune aux deux diagonales. Le paralléloïde est conservé par un demi-tour d'axe IJ . Quand le paralléloïde prend une position plane, IJ est perpendiculaire à son plan en son centre si c'est un parallélogramme, IJ est dans son plan, médiatrice de ses deux diagonales si c'est un contre-parallélogramme.

Dans le cas du rhomboïde comme dans celui du paralléloïde, orientons les supports des côtés de manière que ces orientations soient conservées par le miroir dans le premier cas, changées par le demi-tour dans le second cas. Cela peut se faire indépendamment sur un couple de côtés égaux et sur l'autre. Il existe donc deux systèmes d'orientation des supports tels que la relation (1) du § 10 - 3 soit satisfaite, menant à deux systèmes distincts de plans bissecteurs des angles. Pour chaque système, le raisonnement du § 10-3 est valable. Tant pour le rhomboïde que pour le paralléloïde, il existe donc deux axes, L_1 et L_2 qui sont chacun les arêtes d'un faisceau de plans bissecteurs. Pour le rhomboïde, L_1 et L_2 sont contenus dans le miroir, parallèles si et seulement si le rhomboïde est plan. Pour le paralléloïde, L_1 et L_2 sont perpendiculaires à IJ . Dans le cas du parallélogramme, L_1 et L_2 sont à l'infini dans des directions de plan rectangulaires ; dans le cas du contre-parallélogramme, L_1 et L_2 sont perpendiculaires au plan du quadrilatère en deux points qui sont les centres des deux cercles inscrits (cf. § 7 - 1).

Inversement, si un quadrilatère $ABCD$ a deux axes, il y a deux manières d'exprimer les demi périmètres comme sommes de deux longueurs de côtés, par exemple $a + d = b + c$ et $a + c = b + d$; il s'ensuit $c = d$ et $a = b$.

On peut rassembler les résultats des deux derniers paragraphes sous la forme :

Théorème : pour qu'un quadrilatère soit décomposé ou unicursal, il faut et il suffit qu'il existe un système de plans bissecteurs concourants dans une position du quadrilatère. S'il en existe un, le quadrilatère est unicursal ; s'il en existe deux, le quadrilatère est décomposé, c'est à dire qu'il a deux couples de côtés égaux.

Conclusion

La déformation d'un quadrilatère gauche dépend de deux paramètres, celle d'un quadrilatère plan dépend d'un paramètre. Les auteurs qui ont fait des calculs sur le quadrilatère articulé ont généralement choisi des angles comme paramètres. Nous avons préféré prendre des distances, à savoir les deux diagonales dans le cas du quadrilatère gauche, liées par une relation dans le cas du quadrilatère plan.

L'aspect distance s'est montré fécond. D'abord il rend plus clair la hiérarchie des différents cas dans le plan, qui est de nature algébrique, comme il a été expliqué dans l'introduction. Ensuite il a permis de découvrir quelques résultats simples, sinon nouveaux, du moins peu connus, tels que :

* La somme des carrés des longueurs des diagonales d'un quadrilatère, plan ou gauche, est inférieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des côtés (Théorème, § 6 - 2, p. 12).

* La nature de la suite de Darboux est précisée. Dans le cas où elle se limite à quatre termes apparaît, en plus du quadrilatère plan à diagonales rectangulaires, le quadrilatère plan dont les côtés sont proportionnels : $a/b = d/c$.

* L'ensemble des (X,Y) , où X et Y sont les carrés des longueurs des diagonales d'un quadrilatère gauche de côtés donnés, est une partie convexe de E^2 . L'ensemble des positions, à déplacement près, d'un quadrilatère dans E^3 est homéomorphe à S^2 (§ 10 - 2).

* Pour tout quadrilatère gauche, il existe une position et une seule telle que les dièdres d'arêtes les diagonales soient droits (p. 21, § 10 - 1).

La nature très privilégiée du quadrilatère dont les quatre sommets peuvent s'aligner sans que les côtés soient égaux 2 à 2 apparaît bien nettement. Pour un tel quadrilatère, dans le plan :

- 1) Il y a deux pivots à révolution complète.
- 2) Les carrés des longueurs des diagonales s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre.
- 3) L'ensemble des positions est connexe.
- 4) Il existe un cercle inscrit.

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, 1) et 3) subsistent, 2) et 4) sont modifiés comme suit :

- 2') Les carrés des longueurs des diagonales s'expriment rationnellement en fonction de deux paramètres.
- 4') Il existe quatre plans bissecteurs des angles du quadrilatère formant faisceau.

Ces quadrilatères privilégiés ont quatre côtés de longueurs différentes ; ils jouissent pourtant de propriétés qui sont celles des rhomboïdes et paralléloïdes, à peine affaiblies. Les uns et les autres jouent un rôle important dans la construction des octaèdres de Bricard comme on le verra.

Bibliographie

- (1) **G. Darboux.** De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. Bulletin des Sciences Mathématiques 1879, (3) p.109-128.
- (2) **G. Koenigs.** Leçons de cinématique. Librairie scientifique A. Hermann (1897).
- (3) **R. Bricard.** Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. Journal de mathématiques pures et appliquées (5) 3 (1897) p. 113-148.
- (4) **G. T. Bennett.** Deformable octahedra. Proceeding of London mathematical society (2) 10 (1912) p. 309-343
- (5) **H. Lebesgue.** Octaèdres articulés de Bricard. Revue de l'Enseignement mathématique (2) 13 (1967) p.175-185.
- (6) **H. Gluck.** Almost all simply connected closed surfaces are rigid. Lecture Notes in Math. 438 , Geometric Topology, Springer-Verlag (1975) p.225-239.
- (7) **M. Berger.** Géométrie. Nathan. Paris 1990.
- (8) **D. Leborgne.** Systèmes articulés et Géométrie au 19ème siècle. Gazette des mathématiciens n°14 juillet 1980.
- (9) **D. Zvonkine.** Courbes elliptiques dans la géométrie élémentaire. Quadrature 27. Argenteuil 1997.